

SESSION DE 2005

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

N.B. : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Forces de Van der Waals

Dans ce problème on appellera “Force de Van der Waals” une force $\vec{f}(r)$ d’interaction entre atomes ou molécules (dénommés par la suite *particules*) dérivant d’une énergie potentielle de la forme :

$$u(r) = -\frac{C_{\text{vdW}}}{r^6}$$

sur une grande plage de distance r entre les centres de masses des particules, avec C_{vdW} une constante *positive*.

Dans la section I on estimera C_{vdW} à partir de caractéristiques macroscopiques des gaz de particules. Dans la section II, on envisagera un certain nombre de mécanismes microscopiques donnant lieu à des forces de type Van der Waals. On montrera au II.6 que, pour des particules neutres, la dépendance “en $1/r^6$ ” du potentiel n’est valable que dans une certaine limite que l’on estimera.

On pourra aborder la section III de façon relativement indépendante des parties précédentes ; on y établira l’expression de la force d’interaction entre deux corps macroscopiques très proches lorsque leurs particules interagissent par des forces de Van der Waals. On étudiera à partir du III.2 une méthode *expérimentale* de mesure de cette force d’interaction macroscopique, dans la perspective de préciser le domaine de validité de la loi en $1/r^6$.

Les parties III.5 et III.6 sont *totalelement indépendantes* du reste du problème. On y analysera une méthode interférentielle de détermination de la séparation entre deux solides transparents qui est au cœur du dispositif expérimental de mesure de force.

Les figures numérotées 1 et 2 sont reproduites sur un feuillet séparé de l’énoncé, à rendre avec les copies. On y représentera clairement les constructions graphiques utilisées pour répondre aux questions III.3.b. et III.4.e,f.

Constante de Planck ($\hbar = h/2\pi$)	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J.s.
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J.K ⁻¹
Nombre d’Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.00 \times 10^8$ m.s ⁻¹
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C ² .J ⁻¹ .m ⁻¹ .
Valeur absolue de la charge de l’électron	$e = 1.60 \times 10^{-19}$ C.
Debye	1 D = 3.34×10^{-30} C.m.
1 atm	1.013×10^5 Pa.

Table 1: Données numériques (*unités usuelles*).

	$\alpha/(4\pi)$ (10^{-30} m ³)	μ (D)	$\hbar\omega_0$ (eV)	a_{mol} (litre ² .atm.mol ⁻²)	b_{mol} (litre.mol ⁻¹)
Ne	0.39	0	21.6	0.21	0.017
HBr	3.61	0.78	11.6	4.45	0.044

I. Lien avec l'équation d'état de Van der Waals.

I.1. Les forces de Van der Waals sont elles attractives ou répulsives ? Donner leur expression.

I.2. On retrouve la contribution de Van der Waals dans des potentiels d'interaction modèles entre particules, comme par exemple le potentiel u_{sd} de type "sphères dures", défini comme suit :

$$\begin{aligned}u_{sd}(r) &= -\frac{C}{r^6} \quad (r > \sigma) \\ &= \infty \quad (r \leq \sigma)\end{aligned}$$

Représenter graphiquement $u_{sd}(r)$. On notera $-u_0$ le minimum de cette fonction. Quelle est l'origine physique de la contribution $r \leq \sigma$? Donner un ordre de grandeur de σ . Justifier l'expression *sphères dures*.

La prise en compte des interactions entre particules conduit à une expression approchée au premier ordre en densité N/V pour l'énergie libre de Helmholtz $F(T, V, N)$ d'un gaz de N particules occupant le volume V à la température T :

$$F = F_{GP} + \frac{N}{V}B(T)Nk_B T$$

où F_{GP} est l'énergie libre du gaz parfait pris dans les mêmes conditions ; $B(T)$, *deuxième coefficient du viriel*, est défini par :

$$B(T) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{u_{sd}(r)}{k_B T}\right) \right] 4\pi r^2 dr$$

I.3.a. Comment calcule-t-on la pression P du gaz à partir de l'énergie libre F ?

Quelle est l'équation d'état $P = \mathcal{P}(V/N, T)$ du système ?

I.3.b. Comparer cette équation avec celle de Van der Waals et en déduire que les deux équations coïncident pour N/V assez petit si :

$$B(T) = b - \frac{a}{k_B T}$$

où a et b sont les coefficients de l'équation d'état de Van der Waals exprimée en fonction du volume v d'une particule :

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T$$

I.3.c. Calculer $B(T)$ pour le potentiel de sphères dures, dans la limite où $u_0 \ll k_B T$.

I.3.d. On trouve dans la Table 1 des valeurs expérimentales des paramètres a_{mol} , b_{mol} intervenant dans l'équation de Van der Waals écrite pour *une mole* de particules.

Après avoir écrit l'équation de Van der Waals pour une mole, exprimer ces paramètres en fonction de a et b .

Calculer numériquement en unités S.I. les valeurs de σ , C_{vdW} et u_0 pour Ne et HBr.

Dans quel domaine de température l'approximation faite au I.3.c. est elle légitime ?

II. Origines physiques des forces de Van der Waals

II.1. Dipôle électrostatique — On considère dans un premier temps une molécule neutre, porteuse d'un moment dipolaire permanent, noté $\vec{\mu}_1$. On suppose d'abord le dipôle fixe : $\vec{\mu}_1 = \mu_1 \vec{u}_1$ avec \vec{u}_1 un vecteur unitaire.

II.1.a. On écrit $\mu_1 = Z_1 e d_1$ où $-e$ est la charge de l'électron et Z_1 un entier. Quelle est la dimension de d_1 ? Quelle représentation physique de la distribution de charge dipolaire cette écriture

suggère-t-elle ?

II.1.b. Montrer que le potentiel électrostatique V_1 créé en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ par le dipôle $\vec{\mu}_1$ situé en O peut s'écrire, pour $\|\vec{r}\| = r \gg d_1$:

$$V_1(\vec{r}) \simeq \frac{dV_+(r)}{dr} \{ \|\vec{r} - d_1 \vec{u}_1\| - \|\vec{r}\| \}$$

où $V_+(r)$ est un potentiel dont on donnera l'expression ainsi que la signification physique.

II.1.c. Exprimer $V_1(\vec{r})$ au premier ordre en d_1/r .

II.1.d. Montrer que le champ électrostatique \vec{E}_1 créée par le dipôle en M vérifie la relation :

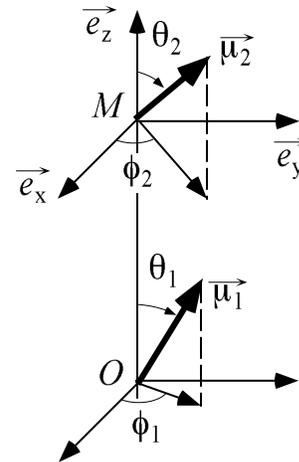
$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ 3 \frac{(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{\mu}_1 \right\}$$

Rappeler l'allure des lignes de champ dans un plan contenant $\vec{\mu}_1$.

II.1.e. On place un second dipôle permanent $\vec{\mu}_2 = Z_2 e d_2 \vec{u}_2$ en M . Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{1,2}$ du second dipôle dans le champ du premier en fonction de $Z_2 e$ et de V_1 en \vec{r} et en $\vec{r} + d_2 \vec{u}_2$. En déduire que, au premier ordre en d_2/r :

$$\mathcal{E}_{1,2} = -\vec{\mu}_2 \cdot \vec{E}_1$$

II.1.f. On repère les deux dipôles par rapport à \overrightarrow{OM} par leurs angles d'Euler, comme indiqué sur la figure ci-contre. Calculer les coordonnées de $\vec{\mu}_1$ et $\vec{\mu}_2$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ puis exprimer $\mathcal{E}_{1,2}$ en fonction de r et de $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$. Comparer les énergies d'interaction des configurations schématisées par $\rightarrow\rightarrow$, $\rightarrow\leftarrow$, $\uparrow\uparrow$ et $\uparrow\downarrow$; commenter.



II.1.g. L'expression trouvée précédemment pour $\mathcal{E}_{1,2}$ est-elle compatible avec une force de Van der Waals ?

II.2. Interactions dipôle-dipôle (Keesom, 1921) — A température finie T , les dipôles liés aux molécules sont animés comme elles d'un mouvement angulaire brownien. On supposera que les degrés de liberté de rotation et de translation des molécules sont indépendants, si bien qu'on considérera deux molécules dont les centres de masses sont fixes et distants de r . Les autres molécules jouent le rôle de thermostat.

II.2.a. Quel est le domaine de variation de Ω , noté \mathcal{O} ? Quelle est la signification de $d^2\Omega_1 = \sin(\theta_1) d\theta_1 d\phi_1$? Que vaut $\int_{\mathcal{O}} d^4\Omega$ avec $d^4\Omega = d^2\Omega_1 d^2\Omega_2$?

II.2.b. On définit $\mathcal{F}(r, T)$ par :

$$\exp \left[-\frac{\mathcal{F}}{k_B T} \right] = \int_{\mathcal{O}} d^4\Omega \exp \left[-\frac{\mathcal{E}_{1,2}}{k_B T} \right]$$

Quelle est la signification du membre de droite ?

Quelle est la nature thermodynamique de $\mathcal{F}(r, T)$?

Relier le travail minimal dW que doit fournir un opérateur extérieur pour écarter les deux particules de dr et la variation $d\mathcal{F}$ lors de cette transformation élémentaire. En déduire ce que représente $\partial\mathcal{F}/\partial r|_T$.

II.2.c. Que vaut $\mathcal{F}_0(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{F}$? Quelle est l'origine physique de \mathcal{F}_0 ?

On notera par la suite $\mathcal{F}_{dip} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0$

II.2.d. On suppose dans la suite que $|\mathcal{E}_{1,2}| \ll k_B T$.

A l'aide de la formule du II.1.d, développer $\mathcal{E}_{1,2}$; vérifier que le terme d'ordre 1 en $|\mathcal{E}_{1,2}|/k_B T$ est nul et qu'il faut donc pousser à l'ordre 2 pour trouver un équivalent de $\mathcal{F}_{dip}(r)$.

II.2.e. Sans calculer explicitement \mathcal{F}_{dip} , montrer que sa dépendance en r est compatible avec une force de Van der Waals.

Tout compte fait, on trouve :

$$\mathcal{F}_{dip} = -\frac{1}{3k_B T} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 r^{-6} = -\frac{C_{\text{Keesom}}}{r^6}$$

II.2.f. Que vaut \mathcal{F}_{dip} pour l'interaction Ne-Ne ? Calculer C_{Keesom} pour HBr-HBr à 300 K puis discuter la validité de l'approximation du II.2.d à cette même température.

II.3. Induction dipolaire (Debye, 1920) — Toute particule est polarisable : plongée dans un champ électrostatique \vec{E} , elle acquiert un moment dipolaire :

$$\vec{\mu} = \alpha\epsilon_0 \vec{E}$$

où α est la polarisabilité, qu'on considèrera en première approximation comme isotrope. On se pose la question de la contribution éventuelle de l'interaction entre un dipôle permanent $\vec{\mu}_1$ et le dipôle $\vec{\mu}_2^{ind}$ induit par le champ dipolaire \vec{E}_1 .

II.3.a. Justifier que l'énergie potentielle d'interaction entre $\vec{\mu}_1$ et le dipôle $\vec{\mu}_2^{ind}$ qu'il induit en M est :

$$\mathcal{E}_{1 \rightarrow 2}^{ind} = -\frac{1}{2} \alpha \epsilon_0 \|\vec{E}_1\|^2$$

Exprimer en fonction de $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ l'énergie de couplage inductif $\mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_{1 \rightarrow 2}^{ind} + \mathcal{E}_{2 \rightarrow 1}^{ind}$.

II.3.b. Reprendre l'analyse du II.2. et définir \mathcal{F}_{ind} correspondant au couplage inductif.

Montrer que cette fois, un développement à l'ordre 1 en $|\mathcal{E}_{ind}|/k_B T$ suffit pour donner un équivalent de $\mathcal{F}_{ind}(r)$ que l'on calculera explicitement.

II.3.c. Cette interaction contribue-t-elle aux forces de Van der Waals ? On notera alors :

$$\mathcal{F}_{ind} = -\frac{C_{\text{Debye}}}{r^6}$$

Calculer C_{Debye} pour Ne et HBr. Discuter la validité de l'approximation du II.3.b. à 300 K.

II.4. Interaction de polarisation mutuelle (London, 1930) — On s'intéresse ici à des atomes non-polaires identiques, de nombre atomique Z . Pour chaque atome, on notera $\vec{d}_i(t)$ ($i = 1, 2$) la position instantanée du centre de masse du nuage électronique par rapport au noyau. Comme précédemment, on note α sa polarisabilité.

II.4.a. Montrer que chaque atome est porteur d'un dipôle instantané $\vec{\mu}_i(t)$ que l'on exprimera en fonction de \vec{d}_i .

II.4.b. En considérant que le même dipôle peut être induit par un champ électrostatique *ad hoc*, calculer la force de rappel \vec{f}_{el} qu'exerce le noyau sur le nuage en faisant intervenir la polarisabilité α de celui-ci. On en déduira que le nuage est "élastiquement" lié au noyau ; on notera κ la raideur du ressort équivalent que l'on exprimera en fonction de Ze et α .

II.4.c. Ecrire l'énergie mécanique \mathcal{H}_1 (énergie cinétique + énergie potentielle) du premier atome, supposé isolé. On notera (x_1, y_1, z_1) les coordonnées cartésiennes de \vec{d}_1 et $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ leur dérivées temporelles. On notera m la masse d'un électron. En écrivant les équations de Newton correspondantes, montrer que $x_1(t)$, $y_1(t)$ et $z_1(t)$ sont les positions de trois *oscillateurs harmoniques indépendants* dont on donnera les pulsations propres.

A quelle caractéristique de $\mathcal{H}_1(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ cette propriété est elle associée ?

II.4.d. En utilisant l'expression du champ dipolaire \vec{E}_1 établie au II.1.d, exprimer l'énergie potentielle d'interaction \mathcal{H}_{int} en fonction des (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2$). On la mettra sous la forme :

$$\mathcal{H}_{int} = \chi \{x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2z_1 z_2\}$$

avec χ une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.

II.4.e. Donner l'expression de l'énergie totale \mathcal{H}_{1+2} des deux nuages électroniques en interaction. Les $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ peuvent-ils encore correspondre à des oscillateurs harmoniques *indépendants* ?

II.4.f. On définit (X_i, Y_i, Z_i) ($i = 1, 2$) par :

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) ; X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) ; \dots$$

Montrer, en effectuant le changement de variables dans \mathcal{H}_{1+2} , que ces nouvelles coordonnées correspondent à 6 oscillateurs harmoniques indépendants dont on exprimera les pulsations propres en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\kappa/(Zm)}$ et $\epsilon = \chi/\kappa$.

NB. On admettra que $\epsilon < 1/2$.

II.4.g. Vérifier que $\epsilon \ll 1$ pour un milieu dilué. On supposera cette condition remplie dans la suite.

NB. On pourra écrire $\alpha/4\pi = r_0^3$ et vérifier dans le cas de Ne et HBr que $r_0 \lesssim \sigma/2$.

II.4.h. On rappelle qu'en mécanique quantique les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation ω sont quantifiés et que l'énergie de l'état fondamental vaut $\hbar\omega/2$

Calculer l'énergie fondamentale \mathcal{E}_0 du système constitué par les deux atomes isolés, puis la correction $\Delta\mathcal{E}_0$ introduite par le couplage, à l'ordre le plus bas en ϵ .

II.4.i. On prend $\Delta\mathcal{E}_0$ comme mesure de l'énergie potentielle d'interaction effective entre les deux atomes non-polaires. Vérifier que cela correspond bien à une énergie de Van der Waals et exprimer la constante C_{London} en fonction de α et ω_0 .

II.5. Bilan quantitatif — On propose de comparer les valeurs de C_{vdW} estimées au I.3.d. à partir de l'équation de Van der Waals à la somme $C_{\text{Keesom}} + C_{\text{Debye}} + C_{\text{London}}$ calculée grâce aux données fournies dans la Table 1.

II.5.a. Calculer C_{London} pour Ne et HBr.

II.5.b. Calculer $C_{\text{Keesom}} + C_{\text{Debye}} + C_{\text{London}}$ pour ces particules et comparer à la valeur de C_{vdW} estimée au I.3.d. Conclure.

II.5.c. Quel est dans chaque cas la fraction de l'énergie de Van der Waals attribuable à l'interaction de London ?

II.6. Forces de Van der Waals retardées (Casimir & Polder, 1948) — On cherche ici à donner une image “avec les mains” de l'interaction de London entre deux particules non-polaires afin d'identifier une limitation fondamentale du modèle.

II.6.a. L'interaction de London peut-elle se comprendre dans le cadre de la mécanique *classique* ?

II.6.b. Dans quel sens peut on dire que $\vec{\mu}_1$ est *fluctuant* ? Quelle est sa valeur moyenne ?

Que vaudrait la moyenne temporelle de l'énergie potentielle de $\vec{\mu}_2$ dans le champ de $\vec{\mu}_1$ si ces deux dipôles fluctuaient indépendamment l'un de l'autre ?

II.6.c. Afin de prendre en compte les corrélations entre dipôles fluctuants, on considère le processus suivant : à un instant $t = t_0$ la particule $\{1\}$ émet un champ dipolaire \vec{E}_1 qui polarise la seconde particule ; celle-ci émet à son tour un champ \vec{E}_2 qui arrive au niveau du premier dipôle à l'instant $t_0 + \Delta t$.

Que vaut le retard Δt ?

Le calcul de London fait l'hypothèse implicite que ce processus d'interaction est instantané puisque le terme de couplage fait intervenir les valeurs de $\vec{\mu}_1$ et $\vec{\mu}_2$ prises au même instant t ; quelle condition sur Δt cela impose-t-il ?

Montrer que cela est légitime tant que $r \ll \Lambda$ où Λ est une longueur que l'on précisera et dont on donnera un ordre de grandeur. Dans le cas contraire, on dit que la force de Van der Waals est “retardée”.

Justifier brièvement que dans la limite non-retardée, l'interaction de $\vec{\mu}_1$ avec son propre champ, réfléchi par la particule $\{2\}$, contribue bien à abaisser son énergie potentielle. Quel est l'effet du retard ?

II.6.d. Exprimer l'énergie d'interaction de London non-retardée, $u_{\text{inst}}(r)$ en faisant explicitement intervenir Λ .

On fait l'hypothèse que l'énergie d'interaction retardée $u(r)$ est de la forme :

$$u(r) = u_{\text{inst}}(r)\varphi(r/\Lambda)$$

où φ est une fonction qui tend vers 1 en zéro. Lorsque $r \gg \Lambda$, on s'attend à ce que $u(r)$ ne dépende plus de Λ mais uniquement de r .

Déterminer la limite $u_{\text{ret}}(r) = u(r \gg \Lambda)$ à une constante multiplicative près.

II.6.e. Casimir & Polder ont établi que :

$$u_{\text{ret}}(r) = -\frac{C'}{r^n} \text{ avec } C' = \frac{23\hbar c}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2$$

Donner la valeur de l'exposant n compte-tenu de l'analyse précédente ou à partir de l'analyse dimensionnelle de C' .

Pour quelle valeur de r/Λ les expressions de London et Casimir sont-elles égales ? Commenter.

III. Forces surfaciques — mesure

On ne considère dans cette partie que des particules *non-polaires*. Pour simplifier les notations, on écrit désormais le potentiel d'interaction entre deux particules sous la forme générale :

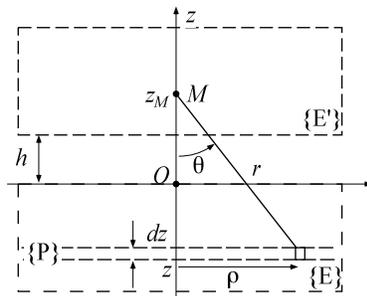
$$u(r) = -\frac{C}{r^n}$$

où $C = C_{\text{London}}$ et $n = 6$ pour une interaction de London à “courte distance” (cf. II.4) et où $C = C'$ et n ont été calculés pour une interaction de Casimir à “grande distance” (cf. II.6).

III.1. Des forces interparticulaires aux forces “surfaiques” (Hamaker, 1937) — On s'intéresse aux conséquences macroscopiques des forces de Van der Waals étudiées au II. On suppose que les interactions interparticulaires sont *additives* et que les expressions trouvées au I. et II. restent valables pour des milieux denses.

III.1.a. Quel est l'ordre de grandeur des *forces* maximales entre deux particules identiques ? De tels niveaux de force sont-ils mesurables ? Quel obstacle pratique y a-t-il à réaliser une telle expérience ?

III.1.b. Calculer l'expression de l'énergie d'interaction $dU_{M,P}(z_M, z)$ entre une particule M et une plaque infinie P , située à la cote $z < 0$, d'épaisseur $dz \ll |z|$, constituée des mêmes particules avec une densité volumique ν . La particule M est située en z_M (cf. figure ci-après).



Géométrie “plan-plan” de l'interaction entre deux demi-espaces

NB. On pourra découper $\{P\}$ en anneaux de rayon ρ (défini sur la figure) et de largeur $d\rho$ et utiliser au besoin les paramètres (r, θ) .

III.1.c. Calculer de même l'énergie potentielle d'interaction $U_{M,E}(z_M)$ entre la particule M et le demi-espace E correspondant aux $z < 0$; M se trouvant toujours en $z = z_M$.

III.1.d. Même question pour le potentiel $dU_{P',E}(z)$ entre une plaque P' d'épaisseur dz et d'aire S située à la cote $z > 0$, et le demi-espace inférieur E .

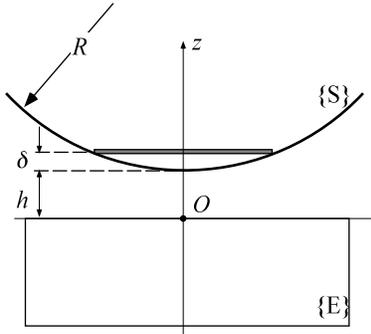
III.1.e. En intégrant une fois encore, calculer l'énergie d'interaction *par unité d'aire* $\Gamma(h)$ entre deux demi-espaces E et E' séparés par une épaisseur de vide h . Vérifier que dans le cas *non-retardé* où $n = 6$, cette énergie surfacique s'écrit :

$$\Gamma(h) = -\nu^2 \frac{\pi}{12} \frac{C}{h^2} = -\frac{A}{12\pi h^2}$$

où on a introduit, conventionnellement, la constante de Hamaker A . Quelle est son unité ?

Calculer dans ce cas la force $\vec{\Pi}(h)$ par unité de surface qu'exerce E sur E' ; comment est elle dirigée ?

III.1.f. La configuration précédente (“plan–plan”) est-elle adaptée à une mise en œuvre expérimentale dans le but de déterminer $\Pi(h)$ et d’en déduire $\Gamma(h)$? Pourquoi préfère-t-on adopter une configuration “sphère–plan” ?



Géométrie “sphère–plan” de l’interaction entre une bille et un demi-espace

III.1.g. Montrer que la résultante des forces de Van der Waals entre une sphère S de rayon R et un demi-espace E dont elle est séparée par une distance $h \ll R$ s’écrit :

$$f_s(h) = 2\pi R\Gamma(h)$$

et ceci quel que soit le régime, retardé ou non. On calculera pour cela l’énergie d’interaction \mathcal{E}_s en utilisant le fait que seuls les disques de particules situés à quelques h de la surface $z = 0$ contribuent significativement à l’interaction.

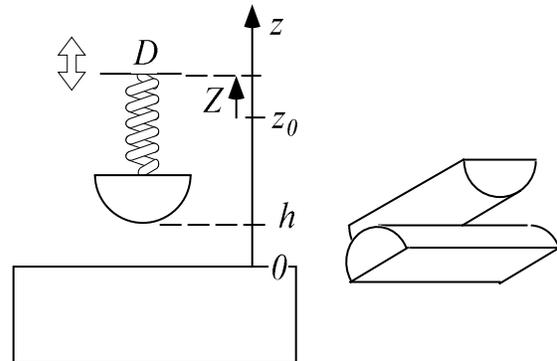
On rappelle que l’aire d’un disque situé à la distance $z = h + \delta$ de E est $S = \pi(2R - \delta)\delta$, soit, pour $\delta \ll R$:

$$S \simeq 2\pi R\delta.$$

III.1.h. Calculer numériquement $f_s(h)$ pour $h = 10$ nm, $R = 1$ cm, et une valeur typique de la constante de Hamaker introduite au III.1.e. : $A = 10^{-19}$ S.I.

III.2. Principe de l’Appareil à Forces de Surface (Tabor & Israelachvili, 1972) — La vérification expérimentale des théories des forces de Van der Waals a donné lieu à de nombreux développements instrumentaux. On s’intéresse ici à un dispositif sans cesse amélioré depuis et qui est devenu courant dans les laboratoires de physico-chimie des surfaces.

L’appareil à forces de surfaces est schématisé ci-contre. Les corps en interaction sont deux feuillets de mica fraîchement clivés et d’épaisseur e , choisis pour leur remarquable état de surface, lisse jusqu’à l’échelle atomique. Ces feuillets sont collés sur les faces convexes de deux lentilles cylindriques dont les axes sont perpendiculaires. La distance entre les deux cylindres, c’est-à-dire entre leurs points les plus proches, est $h \ll e$, si bien qu’on pourra considérer uniquement les interactions mica-mica.



On mesure la séparation h par une technique qui sera étudiée à la question III.5.

Les deux surfaces libres de mica en regard sont cylindriques de mêmes rayons de courbure R . On admettra que tant que $h \ll R$, la configuration “cylindre–cylindre” a la même énergie d’interaction

qu'une configuration "sphère-plan" où la sphère, de rayon R , serait située à la distance h du plan. La formule établie au III.1.g. reste donc valable.

On notera pour simplifier les écritures par la suite :

$$f_s = -\frac{B}{h^p}$$

avec B une constante et p un exposant positif.

Le cylindre supérieur de masse M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur K dont l'extrémité opposée D peut être translatée très finement. *En l'absence d'interaction*, c'est à dire tant que le cylindre inférieur n'est pas monté, on a $h = 0$; D se trouve alors en $z = z_0$. On repère la position courante de D par $z = z_0 + Z$. Sauf mention contraire, le cylindre inférieur est fixe dans le référentiel du laboratoire, galiléen.

On utilisera par la suite les valeurs numériques :

$$M = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg} ; R = 1.58 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

III.2.a. Écrire l'équation de la dynamique pour le cylindre supérieur, paramétré par $h(t)$, en présence du cylindre inférieur ; on négligera à ce niveau toute force de frottement.

III.2.b. On s'intéresse aux positions d'équilibre $h_{eq}(Z)$ pour une position donnée de D . Montrer que ces valeurs peuvent se trouver graphiquement comme intersection(s) de la courbe caractéristique $f_s(h)$ et d'une droite que l'on précisera. Illustrer sur une figure cette résolution graphique pour différentes valeurs de Z . Où lit-on Z sur le graphe ?

Discuter en fonction de Z le nombre de positions d'équilibre pour une valeur donnée de K . On mettra en évidence graphiquement la valeur particulière $Z_c(K)$ de Z pour laquelle le nombre de solutions change.

III.2.c. En tenant compte du fait que h ne peut être inférieure à une distance atomique, que l'on prendra égale à σ défini au I.1., préciser ce qui se passe pour $Z < Z_c$.

Montrer que tant que $K < K_{\max}$, raideur que l'on définira, le passage par Z_c s'accompagne toujours d'un changement du nombre de positions d'équilibre. On supposera par la suite que cette condition est vérifiée.

III.2.d. Traduire par deux équations la définition graphique de Z_c ; les résoudre et exprimer Z_c et $h_c = h(Z_c)$ en fonction de K , p et B .

III.2.e. Afin d'évaluer la stabilité des positions d'équilibre, on définit $\delta h(t) = h(t) - h_{eq}$ dans un voisinage de h_{eq} tel que $|\delta h/h_{eq}| \ll 1$. Quelle est l'équation différentielle *linéaire* vérifiée par $\delta h(t)$? On notera $K_{diff} = df_s/dh$ calculé en $h = h_{eq}$.

Conclure quant à la stabilité des solutions d'équilibre.

III.2.f. Synthétiser les résultats précédents en représentant schématiquement $h_{eq}(Z)$ lorsque Z vient de $+\infty$, diminue jusqu'à être inférieur à Z_c puis augmente à nouveau jusqu'à $+\infty$. N.B. Il sera judicieux d'étudier plutôt $Z(h_{eq})$.

Dans quelle mesure peut-on dire que les feuilles de mica adhèrent l'une à l'autre ?

III.3.a. Quel serait en pratique le comportement du système en $Z = Z_c$?

Israelachvili & Tabor ont ainsi déterminé expérimentalement $h_c(K)$ pour différentes valeurs de K . Leurs résultats sont portés sur la Figure 1.

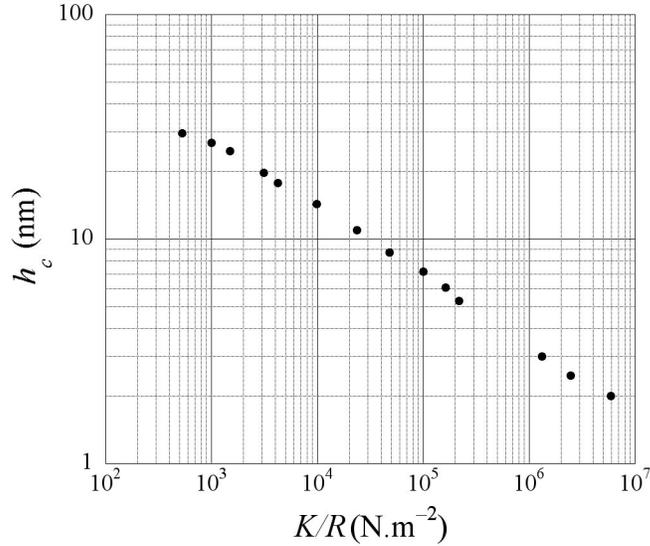


Figure 1: Données expérimentales pour la question III.3. (d'après J.N. Israelachvili et D. Tabor, Proceedings of the Royal Society, London 1972). On considérera que les barres d'erreur ont la taille des symboles représentant les points expérimentaux. Cette figure est reproduite sur le feuillet annexe de l'énoncé, à rendre avec la copie.

Vérifier que ces résultats sont compatibles avec l'analyse de III.1. Retrouver en particulier le régime non-retardé et déterminer la valeur de la constante de Hamaker A pour l'interaction mica-mica.

III.3.b. La zone de transition entre les deux régimes vous semble-t-elle conforme à l'analyse de II.6. ? Y a-t-il suffisamment de données pour conclure à la validité du régime de Casimir & Polder pour les forces retardées ? Proposer une explication pour laquelle des données expérimentales fiables n'ont pas pu être obtenues dans la zone pertinente pour le régime retardé.

III.4.a. Israelachvili & Tabor ont proposé une méthode complémentaire qui consiste à étudier la réponse du système à une modulation $\delta z(t)$ de la position du cylindre inférieur. Celui-ci est solidaire d'un cristal piézo-électrique alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation Ω . L'amplitude du déplacement résultant est $\Delta z \simeq 0.1$ nm.

Réécrire, en tenant compte des nouvelles conditions expérimentales, l'équation de la dynamique pour $h(t)$ au voisinage de $h = h_{eq}$, position d'équilibre *stable* en l'absence de modulation du cylindre inférieur.

Linéariser cette équation en tenant compte de la faible amplitude de la modulation Δz . On définit de nouveau $K_{diff} = df_S/dh(h_{eq})$ et $\delta h(t) = h - h_{eq}$.

III.4.b. Montrer que la réponse δh du cylindre supérieur est résonante à une fréquence ω_r que l'on exprimera en fonction de K , K_{diff} , et M . Que devient ω_r lorsque $Z \rightarrow Z_c$? Lorsque $Z \rightarrow \infty$?

III.4.c. On prend maintenant en compte une force de frottement agissant sur le cylindre supérieur sous la forme $f_v = -\gamma dh/dt$.

Quel est son effet sur la résonance de δh ?

Quel comportement du déphasage $\psi(\Omega)$ entre δz et δh permet de déterminer ω_r , défini à la question précédente, et ceci quelle que soit la valeur de l'amortissement γ ?

Quelle est cependant l'influence de γ sur cette détermination ?

III.4.d. Tabor & Israelachvili ont pris comme ressort un élément piezo-électrique qui génère une tension proportionnelle à son allongement. Afin de mettre en œuvre la méthode de détermination de ω_r décrite précédemment, ils ont utilisé un amplificateur à détection synchrone.

Rappeler brièvement le principe, préciser le mode opératoire et indiquer les avantages de la méthode.

III.4.e. Les résultats ont été analysés comme suit : partant d'une position h_{eq} donnant une mesure ω_r , l'extrémité du ressort est déplacée légèrement, la nouvelle position d'équilibre est $h_{eq} + \Delta h_{eq}$, la nouvelle fréquence est $\omega_r + \Delta\omega_r$.

Établir la relation entre $\log h_{eq}$ et $\log\{\Delta h_{eq}/(\omega_r \Delta\omega_r)\}$. Analyser les données expérimentales représentées sur la Figure 2. Sont-elles compatibles avec l'expression de Casimir & Polder pour la force retardée ?

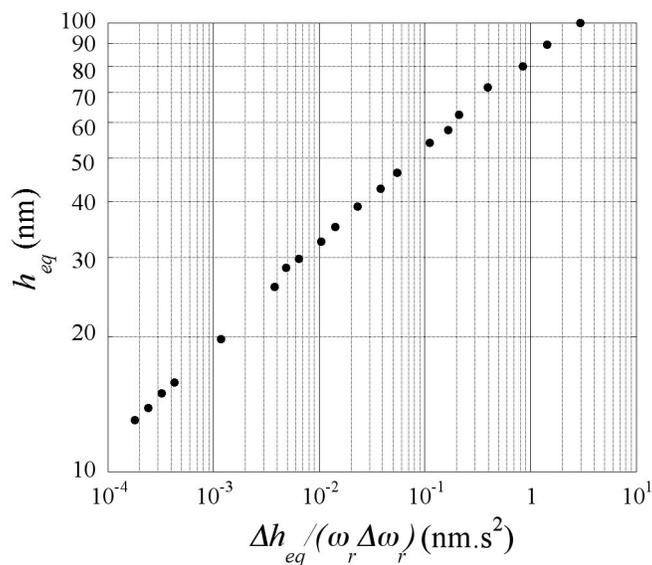


Figure 2: Données expérimentales pour la question III.4. On considérera que les barres d'erreur ont la taille des symboles représentant les points expérimentaux. Cette figure est reproduite sur le feuillet annexe de l'énoncé, à rendre avec la copie.

III.4.f. Estimer à partir des données expérimentales la valeur du produit $C'\nu^2$ pour le mica.

Pour comparer cette valeur à celle prédite par la formule de Casimir & Polder (II.6.e.), on utilisera la relation de Clausius-Mosotti :

$$\frac{\alpha\nu}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

où ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu. On prendra pour le mica $\epsilon_r = 2.53$.

III.5. Mesure optique de h_{eq} . — Tabor & Israelachvili ont utilisé une méthode interférentielle pour déterminer la séparation h . Pour cela, les deux surfaces de mica en contact avec les lentilles cylindriques ont été couvertes avant collage d'une couche mince d'argent de coefficient de réflexion très proche de 1.

Dans un premier temps, on supposera que l'argenture a été réalisée sur les surfaces en regard des deux micas — ce qui ne peut se faire en pratique sans dégrader leur état de surface.

III.5.a. Le dispositif est éclairé par une source lumineuse condensée sur un trou placé au foyer d'une lentille d'axe perpendiculaire aux axes des deux cylindres.

Quel type d'éclairement réalise-t-on ainsi ?

III.5.b. Lorsque le rayon de courbure des cylindres est infini, quel dispositif interférentiel classique réalise-t-on ? Quelle est dans ce cas la condition d'obtention d'interférences constructives pour la lumière transmise ? On supposera que la source est monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ .

III.5.c. En gardant à l'esprit l'idée du III.2.a que la configuration cylindre–cylindre est géométriquement équivalente à la configuration sphère–plan, on considère le cas où R est fini.

On fait l'image des micas sur un écran ; pourquoi ? Qu'observe-t-on ? Qu'apporte l'argenture des surfaces ?

III.5.d. Établir la relation donnant le rayon ρ_p de la frange d'ordre p en fonction de h et R , dans la limite où $\rho_p \ll R$. Montrer qu'il est ainsi possible de déterminer R . Peut-on déterminer h ?

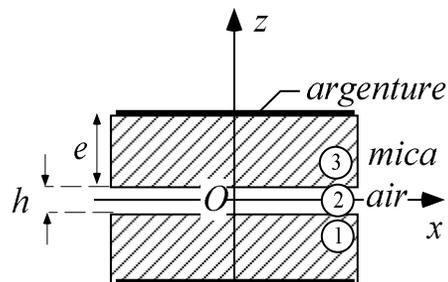
III.5.e. On remplace la source monochromatique par de la lumière blanche. Qu'observe-t-on ? La méthode précédente est-elle encore utilisable ?

On remplace l'écran par la fente d'entrée d'un spectroscopie à réseau. La fente est placée de façon à passer par le centre de la figure d'interférences. Le spectre est observé sur un écran dans le plan conjugué de la fente à travers le spectroscopie. On supposera que la dispersion dans ce plan est linéaire.

Qu'observe-t-on ? Montrer qu'on identifie naturellement des “franges” ; préciser leur forme et leur teinte ; les représenter sur un schéma. Indiquer également ce qu'on observerait avec une source monochromatique.

III.5.f. Montrer que l'analyse quantitative des franges dans le visible permet de déterminer h lorsque celui-ci est “assez grand”.

III.6. — On considère maintenant la configuration pratique pour laquelle l'argenture est à l'extérieur des micas, sur les surfaces collées. On considère que R est infini et on cherche les modes stationnaires du champ électromagnétique dans la cavité constituée par le sandwich argent-mica-air-mica-argent (cf. figure ci-contre), en supposant que les argentures se comportent comme des *miroirs métalliques parfaits*. Les micas ont une épaisseur e de l'ordre du micromètre et un indice de réfraction n (on ignorera la biréfringence et la dispersion du mica) correspondant à une permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = \sqrt{n}$. L'épaisseur du film d'air est h .



III.6.a. Quel est le rapport avec le problème initial posé en termes de conditions d'interférences constructives après traversée du système ?

III.6.b. Rappeler l'expression des relations de Maxwell reliant les champs \vec{E} et \vec{B} dans chacun des milieux considérés, supposés non-magnétiques, non-conducteurs et non-chargés, diélectriques linéaires, homogènes, isotropes. Le mica sera donc simplement caractérisé par sa permittivité diélectrique relative ϵ_r ; l'air sera assimilé au vide.

III.6.c. On cherche un champ transverse de la forme :

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z) \cos(\omega t) \vec{u}_x ; \vec{B}(z, t) = B_y(z) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Quelle relation existe-t-il entre B_y et E_x ?

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par E_x dans chacun des milieux ?

On écrira la solution sous la forme $E_x^{(i)}(z) = \Re\{\tilde{E}_x^{(i)}\}$, \Re indiquant la partie réelle du champ complexe :

$$\tilde{E}_x^{(i)} = A_i^+ \exp(jk_i z) + A_i^- \exp(-jk_i z)$$

où $i = 1, 2, 3$ correspond aux trois milieux du sandwich ; les A_i^\pm sont des constantes complexes, ; les k_i sont trois constantes réelles.

Quelles sont les relations de dispersion reliant ω aux k_i ? En déduire que $k_1 = k_3 = nk_2$. On notera dans la suite simplement $k_2 = k$.

III.6.d. Quelles-sont les conditions aux limites pour $\tilde{E}_x^{(i)}$ au niveau des miroirs ?

Même question pour $\tilde{E}_x^{(i)}$ et $\tilde{B}_y^{(i)}$ aux interfaces air-mica ?

Montrer que la condition sur \tilde{B}_y se ramène à une condition sur $d\tilde{E}_x/dz$.

III.6.e. Faire le décompte des inconnues et des conditions aux limites et vérifier que le problème est bien posé. Sans le résoudre explicitement, indiquer comment on obtiendrait une condition sur k , n , h et e pour l'existence de solutions non-triviales. Donner la signification physique de cette relation.

III.6.f. Tout compte fait, on trouve :

$$\{\tan(kh/2) \tan(nke) - n\} \{\tan(kh/2) \cotan(nke) + 1/n\} = 0$$

où $\cotan = 1/\tan$.

Déterminer les valeurs prises par e lorsque $h \rightarrow 0$. Comment peut-on contrôler la cohérence physique du résultat ? On redéfinira l'ordre d'interférence des franges et on notera λ_p^0 la position en longueur d'onde de la frange d'ordre p .

III.6.g. On met les micas en contact ($h \rightarrow 0$). Montrer qu'on peut alors déterminer la valeur de e si n est connu.

Si on se limite aux longueurs d'onde dans le domaine du visible, estimer le nombre de franges observables et leur ordre lorsque $e \simeq 1\mu\text{m}$ (on prendra $n = 1.59$ dans tout le visible).

III.6.h. Pour $h \ll e$, exprimer le décalage $\Delta\lambda_p$ des franges d'ordre p pair (resp. impair) par rapport à leur position λ_p^0 lorsque $h = 0$. Estimer l'incertitude sur la détermination de h , en considérant qu'on mesure le décalage relatif d'une frange à 10^{-4} près.

III.6.i. Malgré les précautions expérimentales, il arrive que l'interstice entre les micas soit pollué, par exemple par un film organique (eau, ...) d'épaisseur moléculaire. En raisonnant qualitativement sur la symétrie du champ électrique dans le sandwich, montrer que le polluant affecte essentiellement une frange sur deux.

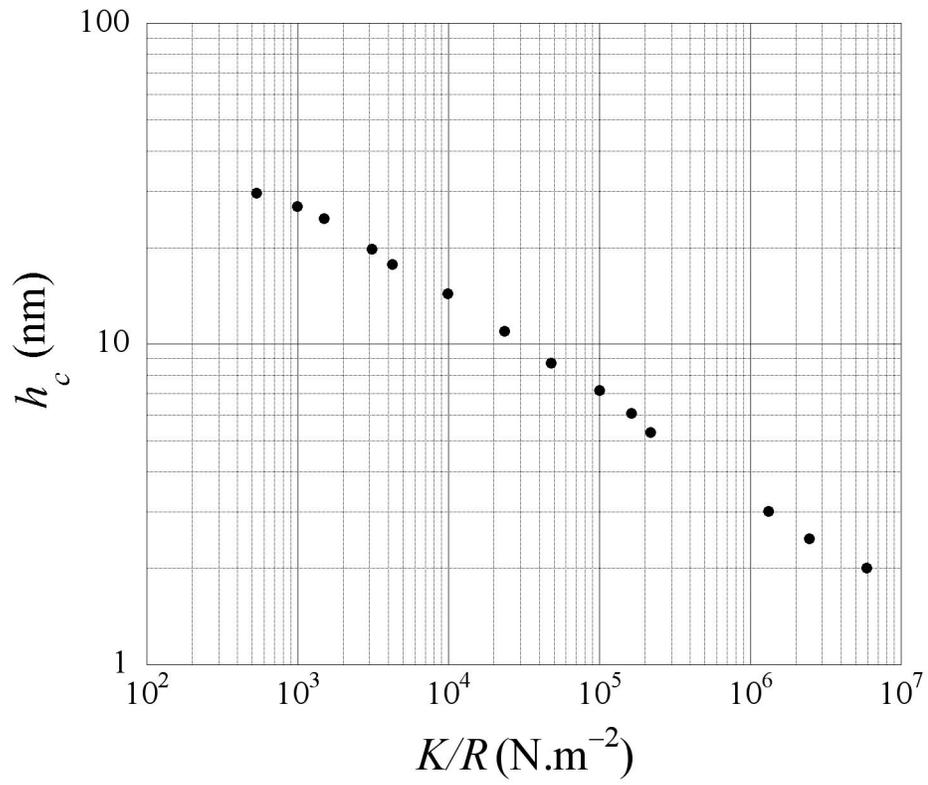


Figure 1.

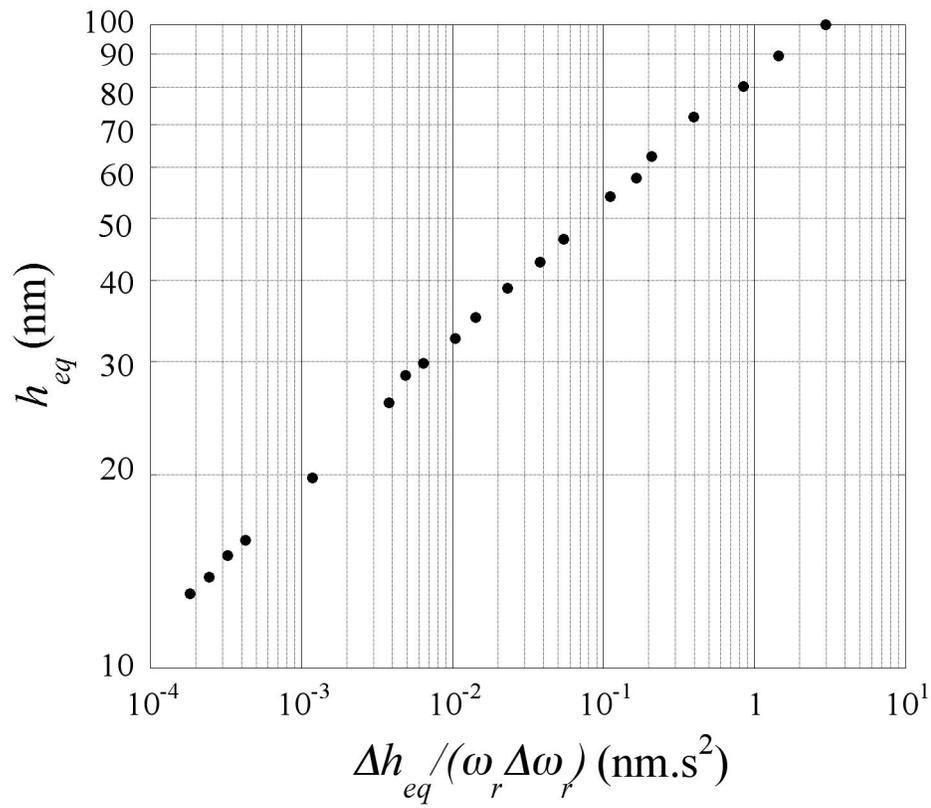


Figure 2.