

INSTABILITES STATIQUE ET DYNAMIQUE DES FLUIDES
INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE

Corrigé

I) La tension superficielle

1) a) Elle correspond à un excès d'énergie en surface .

Pour accroître de dS l'aire de l'interface entre les deux fluides, il faut fournir une énergie : $\delta W = \gamma dS$ où γ est la tension interfaciale entre les deux fluides .

b) γ s'exprime en $N.m^{-1}$ ou $J.m^{-2}$

c) pour l'eau: $\gamma = 70.10^{-3} N.m^{-1}$
pour l'huile : $\gamma = 30.10^{-3} N.m^{-1}$

2) a) La goutte prend la forme qui tend à minimiser l'aire de l'interface, pour un volume donné (on néglige toutes les autres forces, en particulier la pesanteur) : forme sphérique .

b) méthode des travaux virtuels : on imagine une variation de dR du rayon de la goutte sphérique. Variation d'énergie potentielle : $dE_p = \delta W_{surf} + \delta W_{pression}$

$$dE_p = \gamma dS + (p_E - p_H) dV = 8\pi R\gamma dR + (p_E - p_H) 4\pi R^2 dR$$

A l'équilibre E_p est minimale : $dE_p = 0 \Rightarrow$ $p_H - p_E = \frac{2\gamma_{EH}}{R}$

c) Pour une surface (Σ) donnée, l'intersection d'un plan orthogonal au plan tangent à (Σ) en M donne une famille de courbes. En M, on peut définir le rayon de courbure pour chaque courbe. Les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 en M sont les valeurs minimale et maximale de ces rayons de courbure. La courbure C de la surface (Σ) en M est : $C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

d) Généralisation de la loi de Laplace : $p_H - p_E = C \gamma_{EH}$

3) a) Pour R_1 : la courbe appartient au plan orthogonal à (xOz) et contenant MP.

Pour R_2 : il s'agit du plan de figure (xOz)

Vue la symétrie de révolution, R_1 est toujours positif. R_2 peut être de signe quelconque.

b) Par définition, $ds^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2(1 + \dot{z}^2)$. Comme s croît quand z croît, on a le résultat demandé.

D'autre part : $\tan \theta = \frac{dz}{dx} = \dot{z}$ d'où $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}$

c) $R_1 = PM = \frac{z}{\cos \theta}$ d'où $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}$ et $ds = -R_2 d\theta$ d'où

$\frac{1}{R_2} = -\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}$. Comme $\tan \theta = \dot{z}$, $\dot{z} = \frac{d(\tan \theta)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d(\theta)}{dx}$, on en déduit . $\frac{1}{R_2} = -\frac{\dot{z}}{(1 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}$ Compte tenu de la définition de la courbure, on a le résultat demandé.

II) Hydrodynamique en cellule de Hele-Shaw

1) $R_e = \frac{\text{forces inertielles}}{\text{forces de viscosité}} = \frac{\rho b V}{\eta}$ où b est une longueur caractéristique de l'écoulement.

- Si $R_e < 1$: écoulement dominé par la viscosité, laminaire
- Si $R_e \gg 1$: écoulement dominé par la convection, turbulent

2) Ecoulement dû à un gradient de pression selon Ox uniquement, le champ des vitesses est parallèle à Ox.

3) Par l'équation de conservation de la masse, pour un écoulement incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ soit ici $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$.

4) Equation de Navier-Stokes en régime stationnaire, à faible R_e : $\eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p \approx \vec{0}$

En projection sur Ox : $\eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}$. Or $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{V}{w^2}$ et $\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \approx \frac{V}{b^2}$. Comme $w \gg b$, il ne reste que la dérivée en z, d'où le résultat.

5) Par l'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire, à faible R_e , en projection sur Oy et Oz, sachant que $v_y = v_z = 0$, on a $\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\partial p}{\partial z} \approx 0$.

6) On intègre l'équation de Stokes par rapport à z, sachant que $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$ constant :

$v_x(z) = \frac{-G}{2\eta} z^2 + \alpha z + \beta$. Avec les conditions aux limites (CL) : $v_x(\frac{b}{2}) = v_x(-\frac{b}{2}) = 0$, il vient :

$$\boxed{v_x(z) = \frac{G}{2\eta} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)} \quad (\text{Poiseuille}). \text{ Profil } \underline{\text{parabolique}} \text{ avec } v_{\max} = \frac{Gb^2}{8\eta}$$

7) $Q = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = w \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v_x(z) dz = \frac{Gb^3 w}{12\eta} = \bar{v}_x \cdot bw$ d'où la loi de Darcy : $\boxed{\bar{v}_x = \frac{Gb^2}{12\eta}}$

8) $\vec{v} = \bar{v}_x \vec{u}_x$ uniforme est un champ à rotationnel nul, donc correspond à un écoulement potentiel. On peut dire aussi que $\vec{v} = \bar{v}_x \vec{u}_x$ est un champ de gradient (loi de Darcy).

9) a) L_s est de l'ordre du micron.

b) La forme de $v_x(z)$ est la même qu'au 6), mais les CL changent. La fonction doit rester paire donc $\alpha = 0$ et $v_x(\frac{b}{2}) = L_s \left(\frac{dv_x}{dz} \right)_{\frac{b}{2}}$ donne $\beta = \frac{-Gb}{2\eta} \left(L_s + \frac{b}{4} \right)$. D'où le champ des vitesses :

$$\boxed{v_x(z) = \frac{G}{2\eta} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right) + \frac{Gb}{2\eta} L_s}$$
 Le profil reste parabolique mais plus « écrasé » (v_{\max} est plus faible)

que dans le cas précédent : $v'_{max} = \frac{G}{2\eta} \left(\frac{b^2}{4} - L_s b \right)$).

10) a) L'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire, à faible Re s'écrit dans ce cas :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{-G}{\eta}$$

On a donc à résoudre une équation aux dérivés partielles de type équation de Poisson avec des CL nulles aux bords (pb de Dirichlet), on cherche une solution qui soit périodique en x et z (donc développable en série de Fourier) et qui coïncide avec $v_x(x,z)$ sur le pavé

$$\left[\frac{-w}{2}; \frac{w}{2} \right] \times \left[\frac{-b}{2}; \frac{b}{2} \right] .$$

b) On a toujours un écoulement unidirectionnel selon Ox, puisque b et w \ll L. Ici v_x dépend de y et z .

$$\text{c) CL : } \begin{array}{l} v_x\left(\frac{-w}{2}, z\right) = 0 \quad \forall z \quad v_x\left(y, -\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \forall y \\ v_x\left(\frac{w}{2}, z\right) = 0 \quad \forall z \quad v_x\left(y, \frac{b}{2}\right) = 0 \quad \forall y \end{array}$$

car pas de glissement sur les parois.

d) v_x est une fonction paire de y par symétrie des lignes de courant. On a donc $b_n = 0$.

e) $\forall y$, $v_x\left(y, \frac{b}{2}\right) = 0 = a_0\left(\frac{b}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{b}{2}\right) \cos(\beta_n y)$, ce qui impose, par unicité du développement en série de Fourier, que tous les coefficients de la série soient nuls :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} , a_n\left(\frac{b}{2}\right) = 0} . \text{ De même en } -b/2 : \boxed{\forall n \in \mathbb{N} , a_n\left(\frac{-b}{2}\right) = 0} .$$

f) En injectant la forme de la solution en série de Fourier dans l'équation de Stokes écrite au 10)a), il vient : $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n(z) \beta_n^2 \cos(\beta_n y) + \frac{d^2 a_0}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 a_n}{dz^2} \cos(\beta_n y) = \frac{-G}{\eta}$ soit

$$\frac{d^2 a_0}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n}{dz^2} - a_n(z) \beta_n^2 \right) \cos(\beta_n y) = \frac{-G}{\eta} \quad \forall y \in \left[\frac{-w}{2}; \frac{w}{2} \right]$$

On considère alors la fonction créneau paire d'amplitude $\frac{-G}{\eta}$: $\Gamma(z) = \frac{-G}{\eta} C(z)$ où C(z) est la fonction créneau d'amplitude unité dont le développement de Fourier est donné dans le formulaire de l'énoncé. La fonction cherchée et $\Gamma(z)$ coïncident sur l'intervalle $\left[\frac{-w}{2}; \frac{w}{2} \right]$. Donc :

$$\frac{d^2 a_0}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n}{dz^2} - a_n(z) \beta_n^2 \right) \cos(\beta_n y) = \frac{-4G}{\pi \eta} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi y}{w}\right) \quad \forall y \in \left[\frac{-w}{2}; \frac{w}{2} \right]$$

Par unicité du développement en série de Fourier, on peut affirmer que leurs coefficients de Fourier sont égaux :

$$\begin{aligned}
& * \frac{d^2 a_o(z)}{dz^2} = 0 \quad (eq1) \\
& * \frac{d^2 a_n}{dz^2} - \beta_n^2 a_n = 0 \quad \text{pour tout } n \text{ pair} \quad (eq2) \\
& * \frac{d^2 a_n}{dz^2} - \beta_n^2 a_n = \frac{-4G}{\pi \eta} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{pour tout } n=2p+1 \text{ impair} \quad (eq3)
\end{aligned}$$

g) pour n pair : la solution générale de (eq2) est :

$$a_n(z) = A_n \exp(\beta_n z) + B_n \exp(-\beta_n z) . \text{ Compte tenu des CL, cela impose } A_n = B_n = 0.$$

On a donc $a_n=0$ pour tout $n=2p$ pair.

h) pour $n=2p+1$ impair : l'identification des coefficients de Fourier (ou le fait que la fonction est périodique de période $2w$) impose la valeur de β_n :

$$\beta_n = \frac{n\pi}{w} = \frac{(2p+1)\pi}{w}$$

a_n est alors solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 a_{2p+1}}{dz^2} - \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{w^2} a_{2p+1} = \frac{-4G}{\pi \eta} \frac{(-1)^p}{2p+1} .$$

i) On écrit la solution sous la forme :

$$a_{2p+1}(z) = \frac{4Gw^2(-1)^p}{\eta\pi^3(2p+1)^3} + \alpha_p \operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi}{w} z\right) \text{ puisque } a_n(z) \text{ doit être paire.}$$

La CL $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ donne α_p , d'où la forme de $a_{2p+1}(z)$:

$$a_{2p+1}(z) = \frac{4Gw^2(-1)^p}{\eta\pi^3(2p+1)^3} \left[1 + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi}{w} z\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right)} \right]$$

j) cela donne une magnifique et très simple expression de la vitesse :

$$v_x(y, z) = \frac{4Gw^2}{\eta\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \left[1 + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi}{w} z\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right)} \right] \cos\left((2p+1) \frac{\pi y}{w}\right)$$

k)

$$Q = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} v_x(y, z) dy = \frac{4Gw^2}{\eta\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi}{w} z\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right)} \right] dz \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \cos\left((2p+1) \frac{\pi y}{w}\right) dy$$

Or tous calculs faits, les deux intégrales donnent :

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi}{w} z\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right)} \right] dz = \frac{-2w}{(2p+1)\pi} \operatorname{th}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right) + b \text{ et}$$

$$\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \cos\left((2p+1)\frac{\pi y}{w}\right) dy = (-1)^p \frac{2w}{(2p+1)\pi}$$

D'où :
$$Q = \frac{8Gw^3}{\eta\pi^4} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \left[\frac{-2w}{(2p+1)\pi} \operatorname{th}\left(\frac{(2p+1)\pi b}{2w}\right) + b \right]$$

1) En posant $A(u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \left[\frac{-2u}{(2p+1)\pi} \operatorname{th}\left(\frac{(2p+1)\pi}{2u}\right) + 1 \right]$, Q peut se mettre

sous la forme :
$$Q = \frac{bGw^3}{\eta} A\left(\frac{w}{b}\right)$$
. On utilise ensuite le DL à l'ordre 3 de th en 0, et la somme

donné en 4. du formulaire. Ainsi on a : $A\left(\frac{w}{b}\right) \rightarrow \frac{b^2}{12w^2}$ lorsque $\frac{w}{b} \rightarrow 0$. On retrouve ainsi la

valeur limite de Q calculée à la question 7 :
$$Q \rightarrow \frac{Gb w^3}{12\eta}$$
.

III) Instabilité de Saffman-Taylor

1)
$$\xi_t = \bar{v}_x t$$

2) Loi de Darcy pour chaque fluide:
$$\begin{aligned} \text{Fluide 1 : } \bar{v}_x &= \frac{b^2}{12\eta_1} G_1 \\ \text{Fluide 2 : } \bar{v}_x &= \frac{b^2}{12\eta_2} G_2 \end{aligned}$$

3) Pour $i=1$ ou 2 , on a : $\frac{\partial P_i}{\partial x} = -\frac{12\eta_i}{b^2} \bar{v}_x$ et comme \bar{v}_x ne dépend pas de x , il vient (en prenant les constantes d'intégration nulles) :
$$P_i = -\frac{12\eta_i}{b^2} (x - \bar{v}_x t) \bar{v}_x$$
 pour $i=1$ ou 2 .

4) a) longueur d'onde de la perturbation de l'interface : période spatiale
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

 b) si $\Omega > 0$: instabilité (la perturbation croît)
 si $\Omega < 0$: stabilité
 si $\Omega = 0$: stationnarité

5)
$$v_t^p = \frac{d}{dt} (\xi - \xi_t) = \epsilon \Omega e^{\Omega t} \sin(ky)$$
 pour $t > t_0$

6) Le mouvement est régi par la loi de Darcy : $\vec{v}_i = -\frac{b^2}{12\eta_i} \overrightarrow{\text{grad}} P_i$ pour $i=1$ ou 2 , avec

$P_i = \bar{P}_i + p_i^p$. L'écoulement étant incompressible et potentiel, l'équation de continuité impose que P_1 et P_2 soient solutions de l'équation de Laplace. Comme les pressions non perturbées sont fonctions affines de x , leur laplacien est nul. Il reste donc : $\Delta P_i^p = 0$ pour $i=1$ ou 2 .

7) On cherche les perturbations de pression sous la forme : $P_i^p(x, y, t) = F_i(x, t) \sin(ky)$

$$\Delta P_i^p = 0 = \left[\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} - k^2 F_i(x, t) \right] \sin(ky) \text{ d'où la forme de } F_i(x, t) = A_i(t) e^{kx} + B_i(t) e^{-kx} .$$

Pour le fluide 1 : le milieu 1 est illimité à gauche vers les $x < 0$, P_1^p doit rester borné si $x \rightarrow -\infty$ cela impose $B_1(t) = 0 \quad \forall t$

$$\text{Loi de Darcy : } v_{1x}^p(x, y, t) = -\frac{b^2}{12\eta_1} \left(\frac{\partial P_1^p}{\partial x} \right) = -\frac{b^2}{12\eta_1} k e^{kx} \sin(ky) A_1(t)$$

Pour le fluide 2 : le milieu 2 est illimité à droite vers les $x > 0$, P_2^p doit rester borné si $x \rightarrow +\infty$ cela impose $A_2(t) = 0 \quad \forall t$

$$\text{Loi de Darcy : } v_{2x}^p(x, y, t) = -\frac{b^2}{12\eta_2} \left(\frac{\partial P_2^p}{\partial x} \right) = \frac{b^2}{12\eta_2} k e^{-kx} \sin(ky) B_2(t)$$

CL en $x=\xi$ continuité de la vitesse, donc de la perturbation v_x^p : $v_{1x}^p(\xi, y, t) = v_1^p(y, t) \quad \forall y, \quad \forall t$ et $v_{2x}^p(\xi, y, t) = v_2^p(y, t) \quad \forall y, \quad \forall t$, ce qui donne les deux relations : $-\frac{b^2}{12\eta_1} k e^{k\xi} A_1(t) = \epsilon \Omega e^{\Omega t} \quad \forall t$ et $\frac{b^2}{12\eta_2} k e^{-k\xi} B_2(t) = \epsilon \Omega e^{\Omega t} \quad \forall t$. On en déduit alors l'expression complète des perturbations de pression :

$$P_1^p(x, y, t) = -\frac{12\eta_1 \epsilon \Omega}{k b^2} e^{\Omega t} e^{k(x-\xi)} \sin(ky) \text{ et } P_2^p(x, y, t) = \frac{12\eta_2 \epsilon \Omega}{k b^2} e^{\Omega t} e^{-k(x-\xi)} \sin(ky)$$

8) Loi de Laplace : $P_1 - P_2 = \gamma C$ où C est la courbure de l'interface.

9) R_1 est de l'ordre de $b/2$ et R_2 est de l'ordre de ξ . R_1 ne participe pas à la dynamique de

l'instabilité. On a donc $C \approx \frac{1}{R_2} = -\frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ d'après la relation du I)3)c). Or $\left|\frac{\partial \xi}{\partial y}\right| \ll 1$ d'où,

au premier ordre par rapport à la perturbation, $C \approx -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$. Et compte-tenu de l'expression de ξ ,

$$C \approx \epsilon k^2 e^{\Omega t} \sin(ky)$$

10) $P_1 - P_2 = \gamma \epsilon k^2 \sin(ky) e^{\Omega t}$ en $x=\xi$

Or, $P_1 - P_2 = \bar{P}_1 - \bar{P}_2 + P_1^p - P_2^p$. En outre, on a :

- $(P_1 - P_2)_{x=\xi} = -\frac{12}{b^2}(\eta_1 - \eta_2)(\xi - \bar{v}_x t) \bar{v}_x = -\frac{12}{b^2}(\eta_1 - \eta_2) \bar{v}_x \epsilon e^{\Omega t} \sin(ky)$ d'après la qu. 3)
- $(P_1^p - P_2^p)_{x=\xi} = -\frac{12 \epsilon \Omega}{k b^2}(\eta_1 + \eta_2) e^{\Omega t} \sin(ky)$ d'après la qu.7)

En identifiant les deux expressions de $P_1 - P_2$, il vient, en simplifiant par $\epsilon \sin(ky) e^{\Omega t}$:

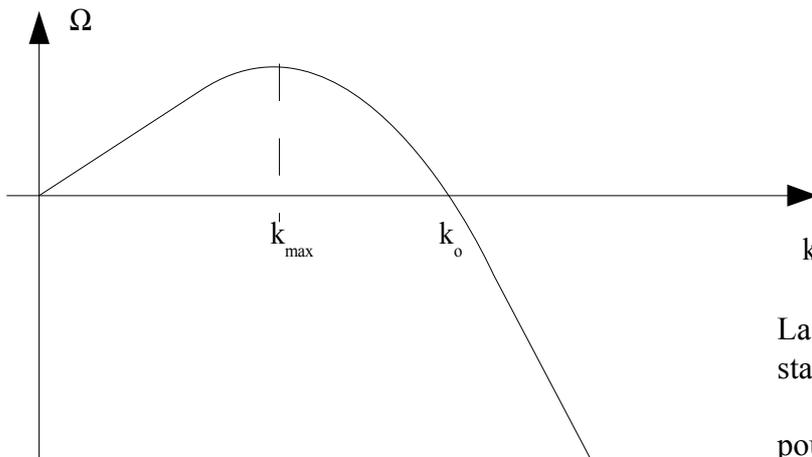
$$\gamma k^2 = \frac{12}{b^2} [(\eta_2 - \eta_1) \bar{v}_x - (\eta_2 + \eta_1) \frac{\Omega}{k}]$$

d'où la relation de dispersion :
$$\Omega = \frac{k}{\eta_1 + \eta_2} \left[(\eta_2 - \eta_1) \bar{v}_x - \frac{\gamma b^2}{12} k^2 \right]$$

11) si $\eta_1 \ll \eta_2$: la relation de dispersion se simplifie en :
$$\Omega \approx k \left(\bar{v}_x - \frac{\gamma b^2}{12 \eta_2} k^2 \right)$$

12) $\Omega(k)$ est maximale pour $\frac{d\Omega}{dk} = 0$ soit
$$k = k_{max} = \sqrt{\frac{4 \bar{v}_x \eta_2}{\gamma b^2}}$$

13)



La perturbation de l'interface se stabilise lorsque $\Omega < 0$, donc

pour
$$k > k_o = \sqrt{3} k_{max}$$

14) Pour $k < k_o$, $\Omega > 0$ et l'instabilité peut apparaître. k_o est donc la valeur critique de k correspondant au seuil d'apparition de l'instabilité.

15) Si $\gamma = 0$, $\Omega = k \bar{v}_x > 0$ d'après la qu.11) . Comportement instable. C'est bien la tension superficielle qui tend à empêcher le développement des doigts.

16) D'après la loi de Darcy, le champ des vitesses est un champ de gradient. On a donc un écoulement potentiel et $\vec{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

17) a) dans l'expérience, $-U$ représente la vitesse moyenne de progression du front par rapport au fluide : $U = \text{vitesse du fluide en sortie de cellule} - \text{vitesse du doigt } \bar{v}_x$

$$\text{b) } \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_s + \Phi_u) = \vec{U} + \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r = \left(U \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2} \right) \vec{u}_r - U \sin \theta \vec{u}_\theta$$

18) Points d'arrêt :

$$\left\{ \begin{array}{l} U \cos(\theta) + \frac{Q}{4\pi r^2} = 0 \\ \text{et} \\ U \sin(\theta) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \text{et} \\ U + \frac{Q}{4\pi r^2} = 0 = 0 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \theta = \pi \\ \text{et} \\ -U + \frac{Q}{4\pi r^2} = 0 \end{array} \right\}$$

La deuxième solution est impossible car $QU < 0$.

On a donc un seul point d'arrêt : $\left\{ \theta = 0 \text{ et } r = r_A = \sqrt{-\frac{Q}{4\pi U}} \right\}$ situé à l'extrémité du « doigt ».

$$19) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin \theta v_\theta) = 0 \quad . \text{ On peut donc bien définir un champ}$$

scalaire $\Psi(r, \theta)$ telle que
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r \sin \theta v_\theta \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta v_r \end{array} \right\} .$$

20) On intègre en r à θ constant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -r \sin \theta v_\theta = r U \sin^2 \theta \Rightarrow \Psi(r, \theta) = U \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + f(\theta)$$

puis $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \left(U \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = U r^2 \sin \theta \cos \theta + f'(\theta)$. Ce qui donne $f'(\theta) = \frac{Q \sin \theta}{4\pi}$

d'où $f(\theta) = -\frac{Q \cos \theta}{4\pi} + C_{ste}$, on prendra la constante nulle, comme indiqué dans l'énoncé.

Conclusion : $\Psi(r, \theta) = U \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q \cos \theta}{4\pi}$

21) a) Cette ligne de courant passe par le point d'arrêt A :

$$\left\{ \theta = 0 \text{ et } r = r_A = \sqrt{-\frac{Q}{4\pi U}} \right\} . \text{ La fonction de courant pour cette ligne vaut donc } \Psi_o = -\frac{Q}{4\pi}$$

b) Equation de cette ligne de courant : $\Psi(r, \theta) = \Psi_o$ soit $r^2 = -\frac{Q}{2\pi U} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

Cette courbe donne la forme du doigt, comme indiqué sur le schéma figure 4.

22)

23) a) Nombre capillaire

$$C_a = \frac{\text{forces visqueuses}}{\text{forces de tension superficielle}} = \frac{\eta U}{\gamma}$$

b) k_{\max} est proportionnel à $\sqrt{C_a}$. Si C_a augmente, k_{\max} augmente donc λ_{\max} diminue et la taille relative du doigt diminue.

24) L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique (par unité d'épaisseur) : $\lambda v_{doigt} = v_{fluide}$, or $v_{fluide} = U + v_{doigt}$ d'où le résultat.

25) * Si $\gamma=0$: c'est toujours instable

* γ contrôle k_{max} donc Ω_{max} , c'est-à-dire la vitesse de progression de l'instabilité

* γ contrôle aussi la taille du doigt

IV) Les ferrofluides

1) $\vec{j}_M = \text{rot } \vec{M}$

2) $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ et s'exprime en A.m⁻¹

3) Equations de Maxwell dans un ferrofluide en régime permanent :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \vec{j}_{libre} \end{aligned}$$

4) μ_r est défini par $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ et $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ d'où $\mu_r = 1 + \chi_m$

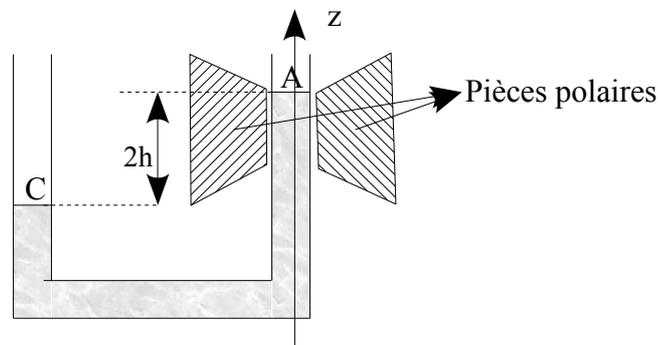
5) $\vec{M} = \frac{\chi_m'}{\mu_0} \vec{B}$, or $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$, d'où $\chi_m' = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m}$

On a $\chi_m' \approx \chi_m$ si $|\chi_m| \ll 1$

6) Paramagnétisme : $\chi_m > 0$ et $|\chi_m| \ll 1$

Diamagnétisme : $\chi_m < 0$ et $|\chi_m| \ll 1$

7)



Le champ magnétique étant inhomogène au sein du fluide, il en résulte des forces volumiques qui

vont faire monter le liquide paramagnétique dans la partie du tube située dans l'entrefer. En effet, χ_m étant positif, le matériau paramagnétique est attiré vers les régions de champ intense.

8)

Force volumique : $\frac{d\vec{F}}{d\tau} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$. Avec $\vec{M} = \frac{\chi_m'}{\mu_0} \vec{B}$, cela donne : $\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \frac{\chi_m'}{2\mu_0} \text{grad}(\vec{B}^2)$.

Entre les pièces polaires, le champ est radial et ne dépend que de z, ailleurs il est nul.

Equation locale d'équilibre du fluide :

$$-\text{grad } p + \rho \vec{g} + \frac{\chi_m'}{2\mu_0} \text{grad}(\vec{B}^2) = \vec{0} = \text{grad}(-p - \rho gz + \frac{\chi_m'}{2\mu_0} \vec{B}^2)$$

On intègre entre les deux surfaces libres (point A où $p=p_0$ et où le champ vaut B, et point C où $p=p_0$ et champ nul) : $-\rho gz_A + \frac{\chi_m'}{2\mu_0} B^2 = -\rho gz_C$. Comme $z_A - z_C = 2h$, on a la relation : $\chi_m' = \frac{4\mu_0 \rho gh}{B^2}$

d'où $\chi_m = \frac{1}{\frac{B^2}{4\mu_0 \rho gh} - 1}$

9) Teslamètre : sonde à effet Hall

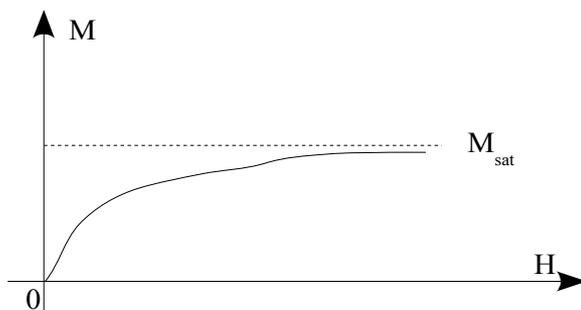
10)

2h (mm)	B (10 ² T)	χ_m'	χ_m
4,00	1,88	0,284	0,397
4,75	2,09	0,273	0,375
5,00	2,24	0,250	0,333
5,50	2,36	0,248	0,329
5,50	2,61	0,203	0,254
		moyenne	0,338
		écart-type	0,055

Moyenne sur $\langle \chi_m \rangle = 0,338$ et écart-type $\Delta\sigma_\chi = 0,055$

χ_m n'est pas $\ll 1$, on ne peut donc pas substituer χ_m à χ_m' .

11) Allure de la courbe d'aimantation :



En champ faible : M est proportionnel à H, ensuite on atteint peu à peu la saturation, comme pour la courbe de première aimantation d'un cristal ferromagnétique. En revanche, il n'y a pas d'hystérésis puisque c'est un fluide.

$$12) \quad \vec{m} = -g \mu_B \vec{J}$$

$$13) \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$$

$$14) \quad W = -\vec{m} \cdot \vec{B} = g \mu_B B J_z \quad \text{et } J_z \text{ est quantifié par } m_J, \text{ d'où : } W = g \mu_B B m_J$$

15) Avec la statistique de Boltzmann, le nombre d'atomes ayant l'énergie $W = g \mu_B B m_J$ est : $N(m_J) = N_o e^{\frac{-g \mu_B B m_J}{k_B T}}$.

D'où $\langle m_z \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{m_J=-J}^J -m_J g \mu_B e^{-m_J X} = g \mu_B \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dX}$ soit $\langle m_z \rangle = g \mu_B \frac{d(\ln Z)}{dX}$ avec Z la fonction de partition :

$$Z = \sum_{m_J=-J}^J e^{-m_J X} = e^{JX} \sum_{m=0}^{2J} (e^{-X})^m = e^{JX} \frac{1 - e^{-(2J+1)X}}{1 - e^{-X}} = \frac{\text{sh}\left(\left(J + \frac{1}{2}\right)X\right)}{\text{sh}\left(\frac{X}{2}\right)} \quad \text{soit } Z = \frac{\text{sh}\left(\left(J + \frac{1}{2}\right)X\right)}{\text{sh}\left(\frac{X}{2}\right)}$$

D'où le résultat demandé.

16) L'aimantation M (composante du vecteur \vec{M} selon Oz, direction de \vec{B}) vaut :

$$M = n_v g \mu_B \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \coth\left(\left(J + \frac{1}{2}\right) \frac{g \mu_B B}{k_B T}\right) - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{g \mu_B B}{2 k_B T}\right) \right]$$

17) a) M_{sat} est atteinte lorsque tous les moments individuels sont alignés avec \vec{B} donc

$$M_{\text{sat}} = J n_v g \mu_B B$$

b) limite classique : $J \rightarrow \infty$

c) Dans la limite classique, $Y \rightarrow \infty$. En reprenant l'expression de M établie à la qu.16), et en mettant J en facteur il vient :

$$M = n_v J g \mu_B \left[\left(1 + \frac{1}{2J}\right) \coth\left(\left(1 + \frac{1}{2J}\right) Y\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{Y}{2J}\right) \right] \approx n_v J g \mu_B \left[\coth Y - \frac{1}{Y} \right] \quad \text{on a bien}$$

$$M \approx M_{\text{sat}} L(Y)$$

d) Pour $Y \ll 1$: à haute température ou champ faible $L(Y) \approx \frac{Y}{3}$

$$M \approx \frac{M_{sat} g \mu_B B}{3 k_B T} \quad \text{on a donc bien } M \text{ proportionnel à } B.$$

Pour $Y \gg 1$: à basse température ou champ fort $L(Y) \rightarrow 1$ donc $M \rightarrow M_{sat}$

e) La théorie ci-dessus permet bien de prévoir le comportement des ferrofluides, en ce qui concerne la courbe d'aimantation.

18) $A_S = 350 \text{ kA/m}$

19) $m_p = 1,47 \cdot 10^{-18} \text{ A.m}^2$ et $m_p/\mu_B = 1,586 \cdot 10^5$ $m_p \gg \mu_B$ d'où le nom de paramagnétisme géant.

V) Instabilité magnéto-hydrostatique de ferrofluide

- 1) - forces stabilisantes : pesanteur et force de tension superficielle
 - force déstabilisante : force magnétique

2) a) Dans le ferrofluide : $\vec{B}_o = \mu_o (\vec{H}_{o,1} + \vec{M}_{o,1})$
 Dans le vide : $\vec{B}_o = \mu_o \vec{H}_{o,2}$

b) En projection sur Oz, cela donne : $B_o = \hat{\mu} H_{o,1z}$ et $B_o = \mu_o H_{o,2z}$

c) $\vec{B} = [\mu] \vec{H}$ donc $\vec{B}_o + \vec{b} = [\mu] (\vec{H}_o + \vec{h})$, cela donne $\vec{b}_1 = [\mu] \vec{h}_1$ et $\vec{b}_2 = \mu_o \vec{h}_2$

3) a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, or \vec{B}_o est uniforme donc cette équation se traduit par $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$

L'équation de Maxwell-Ampère sans courant libre et en régime stationnaire s'écrit :
 $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{libre} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{h} = \vec{0}$. \vec{h} est donc un champ de gradient.

b) Pour le ferrofluide : $\begin{cases} b_{1x} = \mu h_{1x} \\ b_{1y} = \mu h_{1y} \\ b_{1z} = \hat{\mu} h_{1z} \end{cases}$. L'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ se traduit alors par

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) + \hat{\mu} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0$$

Pour l'air : même chose en remplaçant μ et $\hat{\mu}$ par μ_o donc $\Delta \Phi_2 = 0$

4) CL: continuité des composantes normales de \vec{B} et des composantes tangentielles de \vec{H} puisqu'ici pas de courants libres ($\vec{j}_{libre} = \vec{0}$)

Composantes tangentielles :

vecteur tangent $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{pmatrix}$ avec $dz = \left(\frac{dz_o}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz_o}{dy}\right)dy$

en un point M de la surface perturbée $z_o(x,y)$: $\vec{H}_1 \cdot \vec{T} = \vec{H}_2 \cdot \vec{T}$, ce qui donne, à l'ordre 1 des

perturbations : $\left[h_x dx + h_y dy + H_o \left(\frac{dz_o}{dx}\right) dx + H_o \left(\frac{dz_o}{dy}\right) dy \right]_1^2 = 0$. En remplaçant h_x et h_y en fonction

de Φ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + H_o \left(\frac{dz_o}{dx}\right) \right]_1^2 = 0 \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + H_o \left(\frac{dz_o}{dy}\right) \right]_1^2 = 0 \end{array} \right. .$$

On intègre la première par rapport à x et la deuxième par rapport à y. Cela donne :

$$\left[\Phi + H_o z_o \right]_1^2 = cste \quad \forall M \in surface . \text{ Pour } z_o=0, \text{ on a } \Phi=0, \text{ donc la constante est nulle.}$$

On a donc bien la CL : $\left[\Phi \right]_1^2 = - \left[H_o z_o \right]_1^2 \quad \forall M \in surface$

5) Composantes normales : $B_{N1} = B_{N2}$. En projection sur Oz, à l'ordre 1 par rapport aux perturbations : $b_{z1} = b_{z2}$

6) $\left[\Phi \right]_1^2 = - \left[H_o z_o \right]_1^2 \quad \forall M \in surface$ et $\left[M_o \right]_1^2 = - \left[H_o \right]_1^2$ donnent $\left[\Phi \right]_1^2 = z_o \left[M_o \right]_1^2$.
Comme $M_{o,2}$ est nulle dans l'air, on a : $\Phi_1 - \Phi_2 = z_o M_{o,1}$.

D'autre part, la continuité de b_z et les relations $\left\{ \begin{array}{l} b_{z2} = \mu_o h_{z2} = \mu_o \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right) \\ b_{z1} = \hat{\mu} h_{z1} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right) \end{array} \right\}$ donnent l'égalité

demandée : $\mu_o \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=z_o} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=z_o}$

7) Recherche de $\Phi_2(x,y,z)$ sous la forme $f_2(z).z_o(x,y)$

Cette fonction est solution de $\Delta \Phi_2 = 0$ soit :

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = 0 = \frac{\partial^2 z_o}{\partial x^2} f_2(z) + \frac{\partial^2 z_o}{\partial y^2} f_2(z) + z_o f_2''(z) , \text{ ce qui donne, compte-tenu de}$$

la forme de z_o , l'équation en $f_2(z)$: $f_2''(z) - k^2 f_2(z) = 0$.

$$\text{D'où } f_2(z) = A_2 e^{-k(z-z_o)} + B_2 e^{k(z-z_o)}$$

Φ_2 doit rester bornée lorsque $z \rightarrow +\infty$ (le milieu 2 occupe le $\frac{1}{2}$ espace $z > z_o$), donc $B_2 = 0$.

On a donc Φ_2 de la forme : $\Phi_2 = A_2 e^{-k(z-z_0)} z_0(x, y)$

Recherche de $\Phi_1(x, y, z)$ sous la forme $f_1(z) \cdot z_0(x, y)$

Cette fonction est solution de l'équation donnée au 3) b). $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\hat{\mu}}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0$, ce qui se

traduit pour $f_1(z)$ par : $f_1''(z) - \frac{\mu}{\hat{\mu}} k^2 f_1(z) = 0$.

D'où : $f_1(z) = A_1 e^{-k\sqrt{\frac{\mu}{\hat{\mu}}}(z-z_0)} + B_1 e^{k\sqrt{\frac{\mu}{\hat{\mu}}}(z-z_0)}$

Φ_1 doit rester bornée lorsque $z \rightarrow -\infty$ (le milieu 1 occupe le $\frac{1}{2}$ espace $z < z_0$), donc $A_1 = 0$.

On a donc Φ_1 de la forme : $\Phi_1(z) = B_1 e^{k\sqrt{\frac{\mu}{\hat{\mu}}}(z-z_0)} z_0(x, y)$

Conditions aux limites en $z=z_0$: ce sont les deux relations de la question 6)

* $(\Phi_1 - \Phi_2)_{z=z_0} = z_0 M_{o,1}$, ce qui implique : $B_1 - A_2 = M_{o,1}$

* $\mu_o \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=z_0} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=z_0}$, ce qui implique : $-\mu_o A_2 = \hat{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\mu}}} B_1$.

De ces deux équations , on tire $A_2 = -\frac{r}{1+r} M_{o,1}$ et $B_1 = \frac{1}{1+r} M_{o,1}$. Cela donne les expressions demandées.

8) A l'interface : $b_{z2} = \mu_o \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=z_0} = \mu_o \left(-\frac{r}{1+r} \right) z_0 (-k) M_{o,1}$ soit $b_{z2} = \mu_o \frac{rk}{1+r} z_0 M_{o,1}$

b_{z2} est d'autant plus grand (en valeur absolue) que z_0 l'est, donc on a un effet de pointe : le champ magnétique se concentre sur les pics de l'interface.

$$9) \vec{f} = -\overrightarrow{grad} \left(P + \frac{1}{2} \mu_o \vec{H}^2 \right) + \text{div} [H_i B_j]$$

or $\text{div} [H_i B_j] =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(H_1 B_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H_1 B_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(H_1 B_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(H_2 B_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H_2 B_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(H_2 B_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(H_3 B_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H_3 B_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(H_3 B_3)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \left[\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right] + B_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \\ H_2 \left[\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right] + B_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \\ H_3 \left[\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right] + B_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} \quad . \text{Or } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \text{D'où : } \vec{f} = -\overrightarrow{grad} \left(P + \frac{1}{2} \mu_o \vec{H}^2 \right) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}$$

D'autre part, avec la formule n°8 du formulaire, on a :

$$\overrightarrow{grad} (\vec{H}^2) = \overrightarrow{grad} (\vec{H} \cdot \vec{H}) = 2 \vec{H} \wedge \overrightarrow{rot} \vec{H} + 2 (\vec{H} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{H} \quad .$$

Or $\overrightarrow{rot} \vec{H} = \mu_o \overrightarrow{j_{libre}} = \vec{0}$ ici. Il reste donc :

$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} P - \mu_o (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H}$. Enfin, en remplaçant dans cette expression, \vec{B}

par $\mu_o (\vec{H} + \vec{M})$, il vient : $\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu_o (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{H}}$

10) A l'équilibre : $\vec{f} + \rho \vec{g} = \vec{0}$. En outre, $\vec{M} = \vec{M}_o + \vec{m}$ et $\vec{H} = \vec{H}_o + \vec{h}$. Donc, à l'ordre 1

par rapport aux perturbations, on a : $\boxed{\vec{f} \approx -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu_o (\vec{M}_o \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{h}}$

En projection sur Oz, l'équation d'équilibre donne : $-\rho_1 g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu_o M_{o,1} \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0$. On intègre par rapport à z et on obtient l'équation demandée.

11) $[\sigma_{xz}]_1^2 = [H_x B_z]_1^2$. Comme vu aux questions 4) et 5), au premier ordre par rapport à la perturbation, les composantes H_x et H_y sont continues, ainsi que les composantes B_z . Au premier ordre, on pourra donc considérer que $\boxed{[\sigma_{xz}]_1^2 = [\sigma_{yz}]_1^2 \approx 0}$

$$12) [\sigma_{zz}]_1^2 = -(P_2 - P_1) - \frac{1}{2} \mu_o (H_2^2 - H_1^2) + H_{z2} B_{z2} - H_{z1} B_{z1}$$

CL à l'ordre 1 : $B_{z1} = B_{z2}$ continuité des composantes normales de B

$H_{x1} = H_{x2}$ et $H_{y1} = H_{y2}$ continuité des composantes tangentielles de H

D'autre part : $B_z = \mu_o (H_z + M_z)$

- pour le milieu 1 : $B_{z,1} = \mu_o (H_{z,1} + M_{z,1})$
- pour le milieu 2 : $B_{z,2} = \mu_o H_{z,2}$

D'où $[\sigma_{zz}]_1^2 = -[P + \frac{1}{2} \mu_o H^2 - H_z B_z]_1^2 = -[P + \frac{1}{2} \mu_o H_z^2 - H_z B_z]_1^2$ par continuité de H_x et H_y

$$[\sigma_{zz}]_1^2 = -[P + \frac{1}{2 \mu_o} (B_z - \mu_o M_z)^2 - \frac{1}{\mu_o} (B_z - \mu_o M_z) B_z]_1^2$$

$$[\sigma_{zz}]_1^2 = -[P + \frac{1}{2 \mu_o} B_z^2 - B_z M_z + \frac{\mu_o}{2} M_z^2 - \frac{1}{\mu_o} B_z^2 + M_z B_z]_1^2 \text{ et par continuité de } B_z, \text{ on a :}$$

$$\boxed{[\sigma_{zz}]_1^2 = -[P + \frac{1}{2} \mu_o M_z^2]_1^2}$$

13) Loi de Laplace : $[\sigma_{zz}]_1^2 = \gamma C$ or $C \approx -\left(\frac{\partial^2 z_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_o}{\partial y^2}\right) = k^2 z_o$ d'où $\boxed{[\sigma_{zz}]_1^2 = \gamma k^2 z_o}$

14) Avec les deux expressions de $[\sigma_{zz}]_1^2$ obtenues en 12) et 13), on a :

$$\gamma k^2 z_o = -(P_2 - P_1)_{z=z_o} - \frac{1}{2} \mu_o M_{o,1}^2 + \mu_o M_{o,1} m_{z1}$$

D'après la question 10), en $z=z_o$
$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 + \rho_1 g z_o - \mu_o M_{o,1} h_{z1} = cste 1 \\ P_2 + \rho_2 g z_o = cste 2 \end{array} \right\} .$$

D'où $-(P_2 - P_1)_{z=z_o} = (\rho_2 - \rho_1) g z_o + \mu_o M_{o,1} h_{z1} + cste$. Cela donne :

$$\boxed{\gamma k^2 z_o = (\rho_2 - \rho_1) g z_o + \mu_o M_{o,1} (h_{z1} + m_{z1}) + cste}$$

15) On prend la constante nulle, et avec la question 8) : $b_{z2} = \mu_o \frac{rk}{1+r} z_o M_{o,1}$ et

$$\mu_o (h_{z1} + m_{z1})_{z=z_o} = (b_{z1})_{z=z_o} = (b_{z2})_{z=z_o} , \text{ il vient : } \gamma k^2 = (\rho_2 - \rho_1) g + k \mu_o \frac{r}{1+r} M_{o,1}^2$$

ce que l'on peut écrire sous la forme :
$$\boxed{[\rho]_1^2 \frac{g}{k} + \mu_o \frac{1}{1+r} M_{o,1}^2 = \gamma k}$$
 ce qui est la relation de dispersion attendue.

16) $M_{o,1}$ est minimale pour k tel que $\frac{dM_{o,1}^2}{dk} = 0$ c'est-à-dire pour
$$\boxed{k = k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) \frac{g}{\gamma}}}$$

On peut vérifier que c'est bien un minimum, car pour $k < k_c$ $\frac{dM_{o,1}^2}{dk} < 0$ et pour $k > k_c$ $\frac{dM_{o,1}^2}{dk} > 0$

17) L'aimantation critique correspondante M_c correspond à la valeur de $M_{o,1}$ en $k=k_c$.

On trouve
$$\boxed{M_{o,1}^c = 2 \left(\frac{1+r}{\mu_o} \right) \sqrt{g \gamma (\rho_1 - \rho_2)}}$$

$M_{o,1}^c$ varie en $\sqrt{\gamma}$: si γ augmente, le seuil d'apparition de l'instabilité augmente, ce qui est normal, puisque les forces de tension superficielle stabilisent l'interface.

18)
$$\boxed{\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 10,8 \text{ mm}}$$

Différence avec la valeur mesurée : - incertitudes sur la mesure
- certaines grandeurs (ρ , γ , r) dépendent de T

19)
$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\mu_o^2}{\mu \hat{\mu}}}$$
 varie de 0 (si $\mu \hat{\mu} \rightarrow \infty$) à 1 (si μ et $\hat{\mu} \rightarrow \mu_o$)

20) Dans le cadre du modèle proposé ici, $M_{o,1}^c = 6960 \text{ A.m}^{-1}$

γ , ρ et surtout χ_m sont connus de manière approchée (et dépendent de la température). D'autre part, l'isotropie du fluide peut être remise en question.