

CONCOURS EXTERNE DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

SESSION 2005

Solution de l'épreuve A (composition de physique)

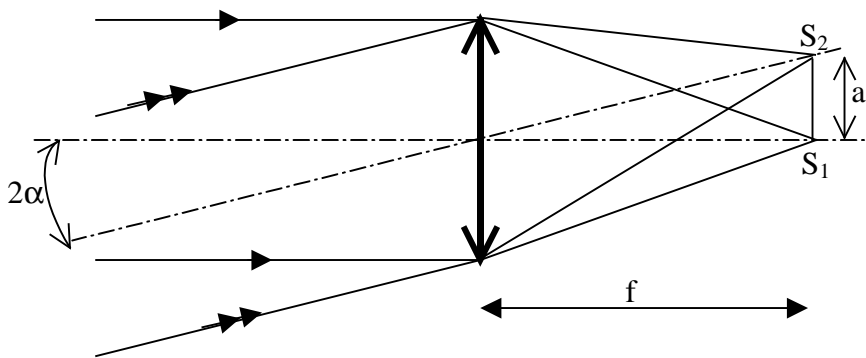
proposée par Rémi BARBET-MASSIN et Peter HOLDSWORTH

PARTIE 1. ONDES EN PHYSIQUE CLASSIQUE : COHÉRENCE ET PAQUETS D'ONDES

Section A : Cohérence des ondes lumineuses

A.1 : Mise en évidence des trains d'onde. Expérience d'Arago :

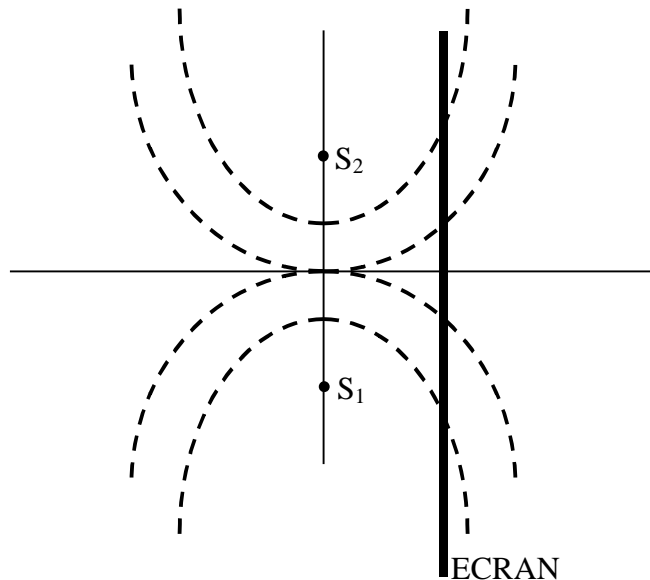
A.1.1 : Interférences en lumière parfaitement cohérente :



- α étant petit ($< 1^\circ$) on peut confondre α et sa tangente $\Rightarrow a = 2f\alpha$, $d \gg f \gg a$, $\alpha < 1^\circ \approx 1,7 \cdot 10^{-2}$ rad.
- Théorème de Malus, le plan de sortie du laser est un plan d'onde, S_1 et S_2 respectivement sont des surfaces d'ondes limites des ondes sphériques convergentes issues de la lentille.
- La LSR sépare le faisceau incident en deux faisceaux identiques, d'éclairement moitié de l'éclairement incident donc, en revenant à l'amplitude, $|s'_0| = s_0/\sqrt{2}$.
- Les ondes sphériques issues des deux sources S_1 et S_2 sont vues en termes d'amplitude $\propto 1/r$ de façon identique car $\frac{\delta r}{r} = \frac{a}{d} \ll 1$. Il n'en est évidemment pas de même pour la phase, vu que la comparaison de la différence de marche est faite par rapport à λ_0 .
- $$\underline{s}(P) = s'_0 \exp(2i\pi\nu_0 t) \times A$$
$$A = \left\{ \exp(-2i\pi\sigma_0(\delta_{S_1} + S_1 P)) + \exp(-2i\pi\sigma_0(\delta_{S_2} + S_2 P)) \right\}$$
$$\Rightarrow \mathcal{E} = \underline{s}_1 \underline{s}_1^* = s_0'^2 \{1 + \exp(i\varphi)\} \{1 + \exp(-i\varphi)\}$$

$$\varphi = 2i\pi\sigma_0(\delta_{S_2} - \delta_{S_1}) + 2i\pi\sigma_0(S_2P - S_1P) \Rightarrow \varepsilon = 2s'_0(1 + \cos(\varphi)) = 4s'_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

- f) Les surfaces d'iso-éclairage sont données par $\varphi = \text{const} \Rightarrow (S_2P - S_1P) = \text{const}$, ce sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe S_1S_2 , dont l'intersection avec l'écran donne des hyperboles assimilables à des droites tant que $OP \ll d$. Ces droites sont perpendiculaires à l'axe S_1S_2 .



- g) L'interfrange i est la distance séparant deux droites consécutives de même éclaircissement et correspond à une variation de φ de 2π et donc une variation de $(S_2P - S_1P)$ de λ_0 . Vu l'allure des franges on travaille dans le plan de la figure avec $y=0$, pour P et donc $S_2P^2 - S_1P^2 = (x-a)^2 + d^2 - (x^2 + d^2)$

$$\Rightarrow S_2P^2 - S_1P^2 = -2ax + a^2 \quad S_2P - S_1P = \frac{-2ax + a^2}{2d} \quad \Delta(S_2P - S_1P) = -\frac{a}{d} \Delta x$$

$$\Rightarrow i = \frac{\lambda_0 d}{a} = \frac{\lambda_0 d}{2f\alpha} = \frac{d}{2f\alpha\sigma_0}$$

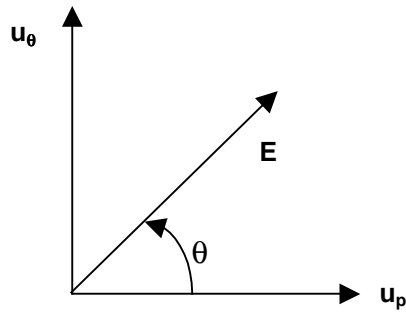
$$\text{Pour } \alpha \sim 1^\circ = 1.7 \times 10^{-2} \text{ rad}, f \sim 10^{-3} \text{ m}, \lambda_0 \sim 5 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad \Rightarrow i \sim 1.4 \text{ cm}$$

- h) $\varepsilon_{\text{max}} = 4s'_0$, au lieu de $2s'_0$ en sommant les éclaircissements, mais on a bien $\varepsilon_{\text{moy}} = 2s'_0$, l'énergie en plus dans les franges brillantes est celle qui manque dans les sombres....

A.1.2: Rôle de la polarisation :

- a) Un tel polariseur agit comme un projecteur, en laissant passer la projection du champ sur une de ses directions propres et en absorbant le champ sur la direction perpendiculaire \vec{u}'_p (polariseur idéal)

$$\vec{E} = E_0 \cos(\theta) \vec{u}_p + E_0 \sin(\theta) \cdot \vec{u}'_p$$



Après le polariseur on récupère $E_0 \cos(\theta) \vec{u}_p \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \theta$, c'est la loi de Malus.

b) * Si P_1 et P_2 sont parallèles, on récupère après eux des vibrations qui restent parallèles entre elles ($\alpha < 1^\circ$) et donc on peut rester en scalaire.

* Si P_1 et P_2 sont perpendiculaires, on perd les interférences issues du terme croisé $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \cdot \underline{s}_2$, qui devient $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \cdot \underline{s}_2$ avec ici un produit scalaire nul car $\underline{s}_1 \perp \underline{s}_2$. Ici $\mathcal{E} = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2) \cdot (\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) = s_0^2 + \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \cdot \underline{s}_2$. Donc si $P_1 \perp P_2$ le calcul est le même qu'en A.1.1.e et si $P_1 \perp P_2$: $\mathcal{E} = 2s_0^2$, éclairage uniforme de même intensité moyenne.

c) Si la polarisation incidente est parfaitement définie, on a pour les amplitudes :

$$\text{Laser} \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_3 \Rightarrow L$$

$$\frac{s_0 \vec{u}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{s_0}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \vec{u}_{P_1} \Rightarrow \frac{s_0}{2} \cos(\theta) \vec{u}_{P_3}$$

$$\text{Laser} \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow L$$

$$\frac{s_0 \vec{u}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{s_0}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \vec{u}_{P_2} \Rightarrow \frac{s_0}{2} \sin(\theta) \vec{u}_{P_3}$$

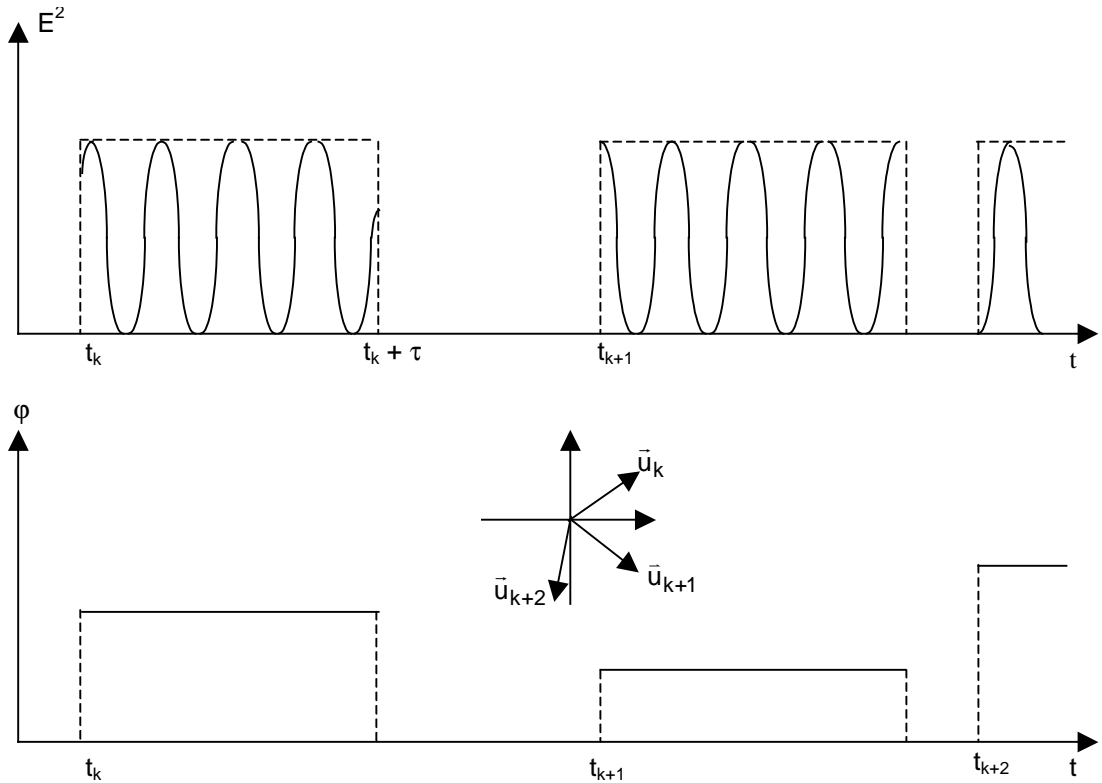
Le calcul d'éclairement ici redevient scalaire avec :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} s_0^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + s_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) = \frac{1}{2} s_0^2 (1 + \sin(2\theta) \cos(\varphi)).$$

On remarque $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} s_0^2$ au lieu de $\langle \mathcal{E} \rangle = 2s_0^2$, à cause des polariseurs qui absorbent une partie de l'énergie incidente, mais il y a réapparition des interférences sauf si $\theta = 0$ ou $\pi/2$ (dans ce cas P_1 ou P_2 arrête totalement la lumière \Rightarrow pas d'interférences possibles). Le contraste ici est moins bon qu'en A.1.1. sauf si $\theta = \pi/4$ (équi-partage).

*En réalité on n'observe pas la réapparition des interférences car à chaque train d'onde la direction de la polarisation change : $\theta(t)$ aléatoire $\Rightarrow \langle \sin(2\theta) \cos(\varphi) \rangle_t = 0$. L'onde n'est donc pas parfaitement monochromatique.

A.1.3 : Cohérence de polarisation : trains d'onde :



a)

b) *En l'absence de polariseurs, comme $\delta \ll c\tau$, ce sont essentiellement les ondes d'un même train qui interfèrent entre elles, les vibrations sur deux chemins différents restent essentiellement parallèles entre elles (en négligeant les effets de polarisation très partiels induits par LSR entre autres).

*avec P_1, P_2 et P_3 on a vu que $\langle \sin(2\theta(t))\cos(\varphi) \rangle = 0$ d'où l'absence d'interférences lors de l'observation sur un grand nombre de trains d'ondes.

*Avec P_4 en plus on projette tous les trains d'ondes incidents sur la même direction ce qui revient à faire $\theta = \pi/4$ et à modifier $s_0/\sqrt{2}$ en $s_0/\sqrt{2}\cos(\theta - \pi/4)$, ce qui donne pour ε :

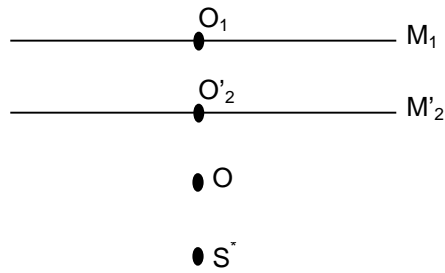
$$\varepsilon = \frac{s_0^2}{2} \langle \cos^2(\theta - \pi/4) \rangle (1 + \cos(\varphi))$$

Avec $\langle \cos^2 x \rangle = 1/2$, les interférences réapparaissent donc bien ici.

A.2 : Analyse de la forme d'un train d'onde : utilisation de l'interféromètre de Michelson :

A.2.1 : Source monochromatique :

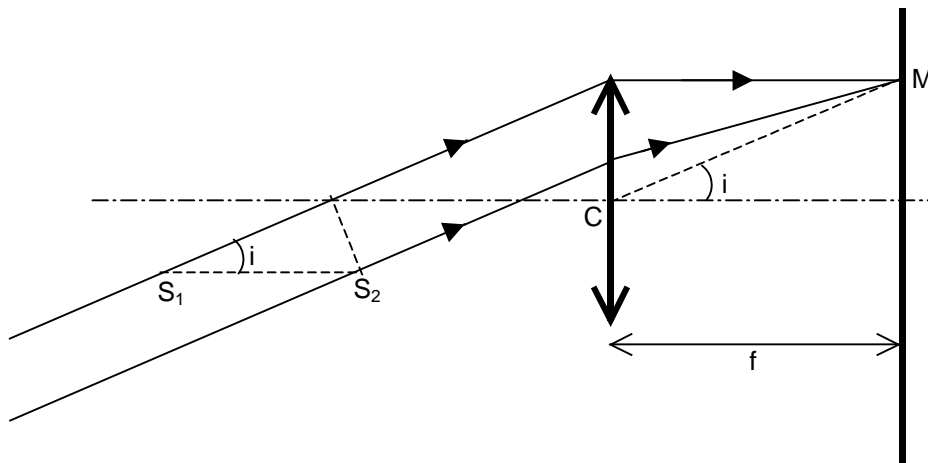
a) Les réflexions sur (SP) équivalent à des symétries par rapport à ce plan, il est donc équivalent de considérer S ou sa symétrique S^* par (SP), y compris en termes de chemins optiques, si on considère (SP) idéale. De même on peut remplacer (M_2) par son symétrique par rapport à (SP) (M'_2) qui est alors parallèle à (M_1) vu les hypothèses. Si on appelle O_1 et O_2 les projections de O sur (M_1) et (M'_2) on obtient alors le schéma suivant :



$\Rightarrow e=O_1O_2$ et S_1 et S_2 se déduisent de S^* par symétrie | (M_1) et (M_2) (réflexions sur ces miroirs) et sont donc distantes de $2e$.

b) * On observe des anneaux circulaires centrés sur l'axe S^*S_1 si on observe à distance finie (intersection des hyperboloïdes vus en A.1.1.f avec un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution de ces hyperboloïdes).

*Si on observe dans le plan focal d'une lentille convergente, on est en fait à l'infini, et à un point sur l'écran correspond seulement une direction i des rayons incidents sur la lentille. L'axe de la figure est alors l'axe optique de la lentille.



c) *Tout déplacement de S latéralement ou en profondeur ne change pas la figure ci-dessus ; les rayons convergents en M sont associés à une différence de marche $2e\cos(i)$ indépendamment du point source dans le cas d'observation à l'infini.

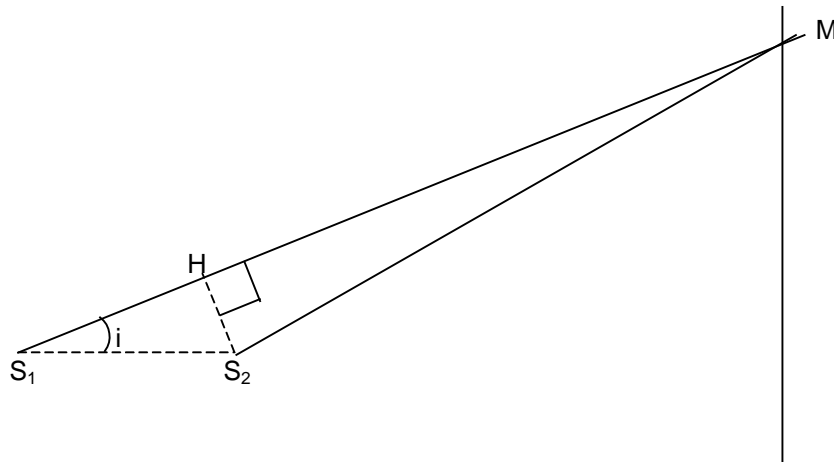
*A distance finie : un déplacement latéral correspond à un déplacement du système d'anneaux associé (déplacement de l'axe associé).

Un déplacement en profondeur correspond à un élargissement du système d'anneaux (cf. hyperboloïdes).

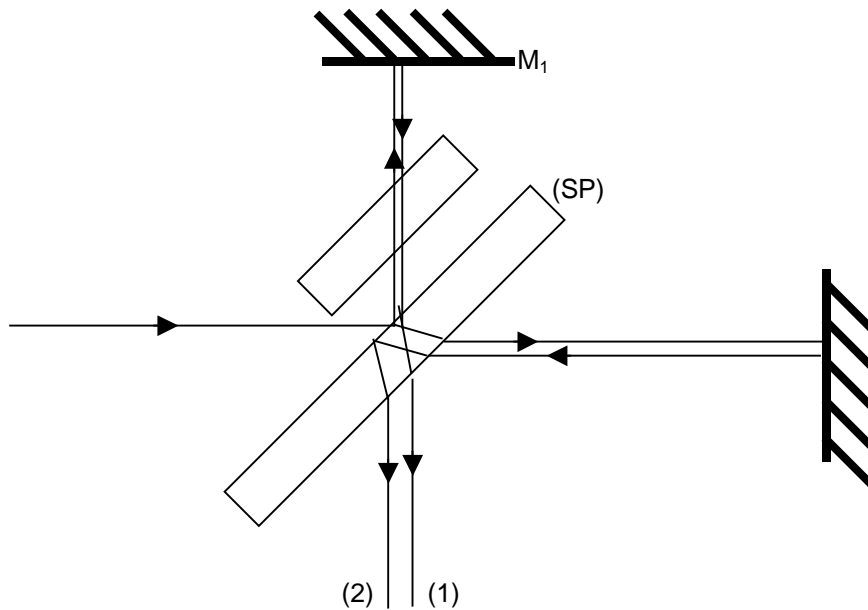
d) On en déduit un brouillage progressif des différents systèmes d'anneaux associés aux points sources, sauf dans le cas de l'observation à l'infini où la figure ne dépend pas de la taille de la source. Il y a localisation des interférences à l'infini, et ce sans limitation sur l'étendue de la source (contrairement au cas des franges du coin d'air).

e) Même calcul qu'en A.1.1.e. avec ici δ_{S_1} et $\delta_{S_2}=0$, car le chemin optique pour aller de S à P via M_1 est le même que celui pour aller de S_1 à P . Idem pour S_2 via

M_2 . On arrive donc à $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \cos(\varphi))$ avec $\varphi = 2\pi\sigma_0(S_2M - S_1M)$ et $(S_2M - S_1M) = (S_1H_1) = 2e \cos(i)$ car $(H_1M) = (S_2M)$ via le théorème de Malus.



f) Si (SP) est d'épaisseur finie, le traitement semi-réfléchissant est sur une des deux faces et les rayons passant par M_1 et M_2 ne traversent pas le même nombre de fois le milieu d'indice n de la lame : ici (1) traverse une fois et (2) trois fois.



On rajoute alors une compensatrice qui réglée parallèle à la séparatrice rajoute sur le trajet (1) les traversées manquantes. Cette compensatrice est du même indice n et de même épaisseur que la séparatrice.

g) Exemple avec lampe spectrale :

1. Réglage géométrique, source à l'infini (auto collimation), observation à l'infini \Rightarrow chaque point source correspond à une direction incidente du faisceau lumineux qui donne autant de faisceaux images dans des directions distinctes que de surfaces non-parallèles au sens de la figure 5. On confond les

images en réglant l'orientation de M_2 par rapport à M_1 , mais ceci à la précision de l'optique géométrique~quelques minutes d'angles => il reste un coin d'air.

2. On éclaire alors l'ensemble de la surface des miroirs en faisceau quasi-parallèle. On observe l'image géométrique des miroirs (localisation des franges) et on chariote jusqu'à la position où on voit des franges.

3. On ferme le coin en réglant l'orientation de M_2 jusqu'à n'observer qu'une seule frange sur les miroirs.

4. On se place en lumière convergente (pour avoir plus d'inclinaisons différentes possible) et on observe à l'infini.

Le chariotage fait alors défiler les anneaux et on règle le parallélisme séparatrice/compensatrice en rendant les anneaux circulaires.

A.2.2 : Obtention d'un profil de raie :

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{s}_k(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_k) \exp(i(\omega_0-\omega)t) \exp(-i\varphi_k) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(i(\omega_0-\omega)t') dt' \exp(i(\omega_0-\omega)t_k - \varphi_k) \end{aligned}$$

$\underline{s}_k(\omega) = \underline{s}_{1k}(\omega) \exp(i(\omega_0-\omega)t_k - \varphi_k) \Rightarrow |\underline{s}_k(\omega)|^2 = |\underline{s}_{1k}(\omega)|^2$ ne dépend donc plus de t_k ni de φ_k .

b) Si on néglige tout recouvrement et en considérant τ_k comme la durée caractéristique d'un train d'onde, on a :

$$\langle \underline{s} \underline{s}^* \rangle_t = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_k \underline{s}_k \underline{s}_k^* dt \approx \frac{1}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \underline{s}_k \underline{s}_k^* dt \text{ et en utilisant Parseval-Plancherel}$$

$$\langle \underline{s} \underline{s}^* \rangle_t = \frac{1}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{s}_k(\omega)|^2 d\omega \text{ avec } N=T/\tau_k \text{ intégrales identiques}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\tau_k} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{s}_k(\omega)|^2 d\omega$$

c) L'éclairement peut s'écrire $d\varepsilon = B_\omega(\omega) d\omega = B_\sigma(\sigma) d\sigma$ avec $\omega = 2\pi c \sigma \Rightarrow d\omega = 2\pi c d\sigma$

Et donc $B_\sigma(\sigma) = 2\pi c B_\omega(\omega)$

d) Les ondes à différents σ du paquet d'onde sont incohérentes entre elles, donc on somme les éclaircements. Dans l'intervalle $\sigma, \sigma+d\sigma$ on a :

$$d\varepsilon = B_\sigma(\sigma) d\sigma (1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) \Rightarrow \varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} B_\sigma(\sigma) d\sigma (1 + \cos(2\pi\sigma\delta))$$

ici $\delta = 2e = 2vt$ et donc en choisissant bien l'origine de temps

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\sigma(\sigma) (1 + \cos(4\pi\sigma vt)) d\sigma. \text{ Si on pose } \omega_1 = 4\pi\sigma v \text{ on a alors}$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\sigma(\sigma) \left(1 + \frac{\exp(i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_1 t)}{2} \right) \frac{d\omega_1}{4\pi v} \text{ et si on pose}$$

$$\hat{\varepsilon}_1(\omega_1) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}v} B_\sigma\left(\frac{\omega_1}{4\pi v}\right), \text{ alors}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\varepsilon}_1(\omega_1) d\omega_1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\varepsilon}_1(\omega_1) (\exp(i\omega_1 t) + \exp(-i\omega_1 t)) d\omega_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ε_0 est un composante continue de $\varepsilon(t)$ qui ne donne dans la FFT qu'une contribution à fréquence nulle. ε_1 est la fonction de t dont la TF est précisément $\hat{\varepsilon}_1(\omega_1)$ et ε_2 est son conjugué (car ε_1 est réel, B_σ l'étant).

On obtient ainsi par FFT la somme de $B_\sigma(\sigma)$ et $B_\sigma(-\sigma)$ à une constante multiplicative près, et via le correspondance $\omega_1 = 4\pi\sigma\nu$, $\nu_1 = 2\sigma\nu$, $B_\sigma(\sigma)$ est centré sur les fréquences optiques, donc $B_\sigma(\sigma)$ et $B_\sigma(-\sigma)$ ne se recouvrent pas. En ne gardant que les fréquences positives on conserve ainsi $B_\sigma(\sigma)$ seulement.

- En pratique, le logiciel considère le signal $\varepsilon(t)$ comme périodique de période $T_{enregist} = \Delta/\nu$, d'où un développement en série de Fourier sur les fréquences $k(\nu/\Delta)$ avec k entier. La solution est donc ν/Δ pour ν_1 et $1/2\Delta$ pour σ .
- Avec les motorisations dont on dispose dans les lycées, ν n'est pas constant (on cherche ici une stabilité de $\sim 1\%$ si on veut avoir une résolution à l'Angstrom). Il faut alors récupérer la fonction $\nu(t)$ en utilisant un étalon monochromatique tel qu'une raie laser en même temps que le signal mesuré et en déconvoluant.
- En chimie cette technologie est utilisée dans les spectros infrarouge.

e) Principaux profils de raie :

$$\text{Gaussien : } \exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Delta\omega^2}\right) \qquad \text{Lorentzien : } \frac{A}{1+(\omega-\omega_0)^2\tau^2}.$$

f) A basse pression l'élargissement gaussien est lié à l'effet Doppler dû à l'agitation thermique des atomes émetteurs.

A plus haute pression l'influence dominante est celle des collisions, donnant un élargissement lorentzien.

g) $\Delta\nu\tau \sim 1$ propriété intrinsèque de la TF.

Section B : Paquets d'ondes, vitesse de groupe :

B.1 : Description d'un paquet d'onde spectralement étroit, vitesse de groupe :

B.1.1 :

$$\text{a) } k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g} \quad \text{en posant} \quad v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}}$$

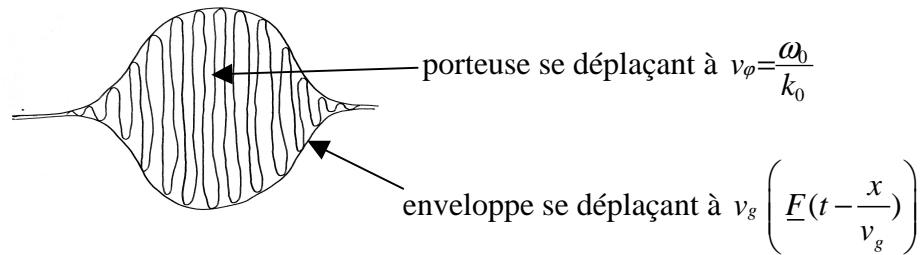
$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) \\ \varphi = \varphi(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\varphi'(\omega_0) = \varphi_0 + (\omega - \omega_0)\varphi'_0$$

$$\Rightarrow \exp(i(\omega t - kx + \varphi)) = \exp(i(\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0)) \exp(i(\omega - \omega_0) \left[t - \frac{x}{v_g} + \varphi'_0 \right])$$

$$\Rightarrow \underline{X} = F\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \exp(i(\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0)) \text{ avec}$$

$$F\left(t - \frac{x}{v_g}\right) = \int \underline{A}'(\omega) \exp(i(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{v_g}\right)) d\omega, \quad \underline{A}'(\omega) = \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega - \omega_0) \varphi_0).$$

- b) La porteuse est à ω_0 , la modulation à $(\omega - \omega_0)$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$ (ailleurs l'enveloppe est nulle car $|A'(\omega)| \rightarrow 0$)



B.1.2 :

- a) Le maximum est obtenu quand toutes les contributions de \underline{F} interfèrent d'une façon constructive, à savoir $\left(t - \frac{x_C}{v_g} + \varphi_0\right) = 0 \Rightarrow x_C(t) = v_g t + v_g \varphi_0$ ($x_C(0) = v_g \varphi_0$).
- b) Ici, pas de déformation puis que la même fonction \underline{F} décrit l'enveloppe à tous instants à une translation près.
- c) Dans le cas d'un paquet d'onde large, on le décompose en paquets plus petits, chacun ayant alors sa propre vitesse de groupe. Il en résulte alors une déformation progressive du paquet large si v_g dépend explicitement de ω .

B.2 : Interprétation interférentielle : stationnarité de la phase :

B.2.1 :

- a) $\partial_\omega \psi = t - \frac{dk}{d\omega} x + \frac{d\varphi}{d\omega} \Rightarrow \partial_\omega \psi = 0$ pour $t - \frac{x}{v_g} + \varphi_0 = 0$.
- b) Il s'agit de considérer ici que toutes les ondes du paquet d'onde sont en phase les unes avec les autres (« interférence constructive ») mais cette phase commune n'est pas forcément un multiple de 2π , c'est la phase moyenne, i.e celle de la porteuse. On parle de stationnarité de la phase car toutes les ondes du paquet ont la même phase au maximum de l'enveloppe (extremum de ψ , donc au deuxième ordre près).

B.2.2 :

- a) Le calcul est le même qu'en B.1.1.a et consiste à écrire $\psi = \psi(\omega_0, t, x) + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \text{const.}$ et donc $t - \frac{x}{v_g} = \text{const.}$ on est sur le même point de l'enveloppe (même valeur de la fonction \underline{F}).
- b) Pour $C \neq 0$, la phase des différentes ondes du paquet varie et les interférences entre elles sont donc moins constructives, d'autant moins que C est grand. Si C est trop grand on aura « brouillage » des ondes les unes par rapport aux autres et le signal résultant sera voisin de zéro : on sort donc du paquet.
- c) Si on peut associer deux à deux les ondes pour qu'elles interfèrent destructivement (comme en élargissant la fente source pour les fentes de Young par exemple), on est aux limites du paquet (le détail dépend évidemment de la forme de $A(\omega)$) et pour cela il faut que $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right) \left(\frac{\Delta \omega_{tot}}{2}\right) = \pm \pi$.

B.2.3 :

- a) On écrit que les limites du paquet d'onde sont données par $t - \frac{x_1}{v_g} + \phi_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{tot}}$. Et $t - \frac{x_2}{v_g} + \phi_0 = -\frac{2\pi}{\Delta\omega_{tot}}$.

donc $\frac{\Delta x}{v_g} = \frac{4\pi}{\Delta\omega_{tot}}$. On écrit ensuite $\Delta k_{tot} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right) \Delta\omega_{tot}$ et donc $\Delta k_{tot} = \frac{\Delta\omega_{tot}}{v_g}$ et finalement $\Delta x \Delta k_{tot} = 4\pi$.

- b) A x fixé on aura de même $\Delta t = |t_1 - t_2| = \frac{4\pi}{\Delta\omega_{tot}} \Rightarrow \Delta t \Delta\omega_{tot} = 4\pi$. On retrouve donc à un facteur 2 près le résultat A.2.2.g.

B.3 : Application : sillage des bateaux :

B.3.1 :

- a) Il s'agit d'ondes mécaniques de surface ou ondes de gravité. $X(x,t)$ est ici le déplacement vertical de la surface libre par rapport à la position d'équilibre.
 b) On peut négliger l'influence de la tension superficielle car on s'intéresse ici à des longueurs d'ondes supérieures à la longueur capillaire (pour l'eau, quelques mm).
 c) g car il n'y a aucune échelle de profondeur caractéristique ici.

$$[g] = ms^{-2}, [\omega] = s^{-1}, [k] = m^{-1} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k} = Kg$$

$$d) 2\omega d\omega = Kg dk, v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{Kg}{\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right) = \frac{1}{2} v_\phi$$

B.3.2 :

- a) L'interaction des ondes avec le bateau est d'autant plus grande que la hauteur de l'eau à la proue est élevée, d'où le résultat.
 b) Les ondes cherchées sont alors « figées » dans le référentiel du bateau : surfaces d'ondes indépendantes du temps (« stationnaires » mais pour les ondes ici le terme est ambigu).

- c) En notant O_1 un point fixe origine du référentiel considéré galiléen on a $\vec{r} = \overline{O_1 P} = \overline{O_1 O} + \overline{OP} = \vec{u}t + \vec{r}_{bat} \Rightarrow \exp(i(\omega t - \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r})) = \exp\{i(\omega t - \vec{k}_\alpha \cdot \vec{u}t) - \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}_{bateau}\}$. Ce terme est figé pour $\omega = \vec{k}_\alpha \cdot \vec{u}$ (donc $\vec{k}_\alpha \cdot \vec{u} > 0$) et donc $\omega^2 = k_\alpha^2 u^2 \sin^2 \alpha = g k_\alpha$ avec $k_\alpha = \frac{g}{u^2 \sin^2 \alpha}$. Donc à chaque direction (α) son vecteur d'onde privilégié.

B.3.3 :

- a) On a cherché à assurer la stationnarité de la phase, soit $\frac{d}{d\alpha} (\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}_{bateau}) = 0$ donc $\frac{d}{d\alpha} (k_\alpha \sin(\alpha - \beta) r) = 0$ à (r, β) fixés. Or $k_\alpha = \frac{g}{u^2 \sin^2 \alpha}$ et donc $\frac{dk_\alpha}{k_\alpha} = -\frac{2\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} d\alpha$.
 D'où $\frac{dk_\alpha}{k_\alpha} \sin(\alpha - \beta) + k_\alpha \cos(\alpha - \beta) = 0$ devient $-\frac{2\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} k_\alpha \sin(\alpha - \beta) + k_\alpha \cos(\alpha - \beta) = 0$
 $\Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \tan(\alpha)$.

- b) On constate sur la courbe que la condition n'est remplie lorsque α varie, que pour $\beta \leq \beta_{\max}$, d'où le cône. $\tan(\beta) = \frac{\tan(\alpha)}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{x}{2 + x^2}$, est maximisé pour $2 + x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ et donc $\tan(\alpha) = \sqrt{2}$, $\alpha = 54.74^\circ$, $\tan(\beta) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\beta_{\max} = 19.74^\circ$. Le cône caractéristique est indépendant de la vitesse du bateau, seule la structure, à l'intérieur des crêtes en dépend.
- c) Les crêtes correspondent à des lieux où les ondes de phases stationnaire sont en outre à leur maximum, c'est à dire à une phase multiple de 2π , comme en 0. Une ligne de crête est donc caractérisée par $\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} = 2m\pi$, m entier fixé. On peut les construire en fixant β : la courbe 7 donne α_1, α_2 puis $k_{\alpha 1}$ et $k_{\alpha 2}$ par $k_\alpha = \frac{g}{u^2 \sin^2 \alpha}$ et enfin \vec{r}_1 et \vec{r}_2 associés par $k_{\alpha i} \sin(\alpha_i - \beta) r_i = 2m\pi$, d'où deux branches par crête. En particulier la branche correspondant à l'axe parallèle à \vec{u} à 90° est celle associée aux grandes valeurs de α . Pour $\beta = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ \Rightarrow k_{\alpha 2} = \frac{g}{u^2}$ et $\frac{g}{u^2} r_2 = 2m\pi$. L'écart entre crêtes successives est donc $\Delta r = \frac{2\pi u^2}{g}$ et ceci donne accès à u si on dispose d'une échelle (taille du bateau par exemple).

PARTIE 2 . ONDES EN MÉCANIQUE QUANTIQUE: COHÉRENCE ET CONFINEMENT

Section A : Incertitudes

A.1 :

- a) $E(x,t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx))$
- b) $\text{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, $\text{div} \vec{E} = 0$ $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
 $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$, $\text{div} \vec{B} = 0$ $= -\partial_t(\text{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \partial_{t,t}^2 \vec{E}$
- $\Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_{t,t}^2 \vec{E} = 0 \Rightarrow -k^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2 \vec{E}) = 0 \Rightarrow k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow v_\varphi$ et
- v_g , tous deux égaux à c ne dépendent pas de ω , le milieu est donc non-dispersif.
- c) Etude spectrale du rayonnement du corps noir par exemple ou effet photo-électrique $\epsilon = h\nu = \hbar\omega$.

A.2:

- h) $\lambda = \frac{h}{p}$.
- i) Une particule est ici associée à une onde monochromatique si p est parfaitement connue, ce qui donne une onde d'extension infinie.
- j) $p = \sqrt{2mE}$ et $E = 10\text{eV} \Rightarrow \lambda = 3.9\text{Å}$. La diffraction par des électrons de cette gamme d'énergie donne accès à la structure de la matière à très petite échelle-application : diffusion par maille cristalline, par exemple.

A.3 :

- a) On utilise par exemple un faisceau d'atomes froids en chute libre à partir d'un point, qui arrivent sur les fentes tous à la même vitesse. Les atomes sont détectés sur une plaque (écran) à environ 1 mètre en dessous des fentes. On observe des franges d'interférences qui se forment avec un interfrange $i \sim \frac{\lambda D}{a}$ où $\lambda = \frac{h}{p}$ (cette valeur est en fait intégrée sur le chemin car p varie en chute libre). On voit en même temps les impacts individuels des atomes.
- b) *Chaque atome est détecté individuellement => corpuscule. .
 *Avec une seule fente les interférences disparaissent.
 *Les impacts sont individuellement aléatoires : phénomène probabiliste dans lequel ce ne sont pas les intensités qui s'ajoutent mais les amplitudes des fonctions d'ondes, dont le carré du module représente la densité de probabilité=>d'où les interférences : avec deux probabilités séparées pour chaque fente différentes de zéro, on peut obtenir une probabilité pour l'ensemble qui est nulle. L'onde associée au faisceau incident monocinétique est approximativement plane et proportionnelle à $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ avec $p = \hbar k$ et $E = \hbar \omega$ (ou autre chose, en ce qui concerne la deuxième relation).
- c) L'expérience permet la mesure de λ et donc le lien $p = \hbar k$ mais elle ne permet pas la mesure de ω qui s'élimine dans le calcul du module au carré de la somme=>on ne peut donc a priori pas préciser ici le lien énergie-fréquence.

A.4 :

- a) $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \hbar k, E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. On a donc $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{p}{2m}$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m}$ et $v_g = 2v_\phi$ et on a bien un milieu dispersif. (Ceci est la situation symétrique au cas des ondes de surface traité en partie A où on trouve $\omega^2 \sim gk$ et $v_g = \frac{1}{2}v_\phi$).
- b) Ici $\Delta \psi = -k^2 \psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi \Rightarrow \Delta \psi = -\frac{2m}{\hbar} \omega \psi$ avec $\partial_t \psi = -i \frac{E}{\hbar} \psi = -i \omega \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i \hbar \partial_t \psi$.
- c) $E = \frac{p^2}{2m}$ devient $E = \frac{p^2}{2m} + V$ et donc $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \Rightarrow i \hbar (-i \omega) = \frac{\hbar^2 (-k^2)}{2m} + V$
 $\Rightarrow i \hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$
- d) Ceci est une équation linéaire, donc la superposition s'applique à ψ , c'est à dire à l'amplitude et non à $|\psi|^2$ densité de probabilité. Les interférences sont donc possibles.
- e) $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta \Rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$ (on part plutôt pour les ondes de de Broglie de $p = \hbar k = \frac{\hbar}{i} \partial_x$)

A.5 :

- g) $dP = |\psi|^2 dx, \rho_p = |\psi|^2$ avec $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_p dx = 1$.
- h) On doit évidemment avoir $\int_{-\infty}^{\infty} dP = 1$ soit $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_p dx = 1$ ce qui n'est pas possible pour $|\psi|^2 = \text{const.} \forall x$ car l'intégrale diverge.

A.6 :

- a) $g(k)$ est la transformée de Fourier de $\psi(x,0)$, d'après le formulaire, et le théorème de Parseval-Plancherel fournit alors $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,0) \psi(x,0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(k) g(k) dk$

b) $\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,0)x\psi(x,0)dx$ de même pour $\langle p(t) \rangle$ avec ici

$$\hat{p}\psi = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,0)\partial_x\psi(x,0)dx.$$

c) $g(k)$ est la TF de $\psi(x,0)$ d'après le formulaire $\Rightarrow \varphi(p) = g(k) \frac{1}{\sqrt{\hbar}}$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left(\frac{p}{\hbar}x\right)\varphi(p)dp$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -i\left(\frac{p}{\hbar}x\right)\psi(x,0)dx.$$

Plus généralement, $g(k)\exp -i\omega t$ est la TF de $\psi(x,t)$ et donc

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp i\left(\frac{E(p)}{\hbar}t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{p}{\hbar}x\right)\psi(x,t)dx$$

ou encore
$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)\psi(x,t)dx.$$

Alors
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(k)|^2 dp = 1.$$

d) La TF de $\partial_x\psi$ est $ikg(k)\exp -i\omega t$ donc

$$\partial_x\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right) \frac{ip}{\hbar} \varphi(p)dp$$

$\langle \hat{p}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \psi^* \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right) \frac{ip}{\hbar} \varphi(p)dp$. On permute l'ordre d'intégration $\langle \hat{p}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p\varphi(p)dp \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \exp i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right) dx \right)$ et on reconnaît $\varphi^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \exp i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right) dx$, où $\langle \hat{p}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p|\varphi(p)|^2 dp$

La généralisation vient de ce que la TF de $\partial_x^n\psi$ est $\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n p^n g(k)$ et donc la TF de

$\hat{p}^n\psi$ est $p^n g(k)$. Le reste du raisonnement est le même que pour $\langle \hat{p}(t) \rangle$.

e) On en déduit que $|\varphi(p)|^2$ joue le rôle de densité de probabilité dans l'espace des p et que $\varphi(p)$ est l'amplitude associée.

A.7 :

a) $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

➤ D'après le formulaire, si $g(k) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} \exp(-k^2/2\sigma^2)$

Alors,
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-x^2\sigma^2/2) \\ \varphi(p) = \left(\frac{1}{\pi\hbar^2\sigma^2}\right)^{1/4} \exp(-p^2/2\hbar^2\sigma^2) \end{array} \right.$$

Alors $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p \rangle = 0$ (intégrales de fonctions impaires sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$).

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{\sigma^2}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2 \sigma^2) dx = \left(\frac{\sigma^2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy = \left(\frac{\sigma^2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sigma^2} I$$

$$I = \left[-\frac{y}{2} \exp(-y^2) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Delta x(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

$\varphi(p)$ est identique, en remplaçant σ par $\frac{1}{\hbar\sigma}$ d'où $\Delta p = \frac{\hbar\sigma}{\sqrt{2}}$ et donc $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ à $t=0$.

La gaussienne est la fonction qui minimise l'incertitude de Heisenberg.

- i) La durée moyenne de passage de la particule à un endroit donné est liée à sa dispersion en énergie par la notation $\Delta E \Delta t \sim \frac{\hbar}{2}$ mais le raisonnement n'est pas ici aussi immédiat et analogue que celui portant sur Δx et Δp .
- j) On retrouve la cohérence temporelle discutée en I.B et les relations du I.B.2.3., à un facteur numérique près (raisonnement en ordre de grandeur en I.B.2.3.).

A.8 :

- a) Par analogie avec I.B.1 on écrit ici $\omega = \omega_0 + v_g(k - k_0)$ et on aboutit alors à $\psi(x, t) \approx \exp i k_0 (x - v_\varphi t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(k - k_0)(x - v_g t) g(k) dk$, soit en posant $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$, on obtient $\psi(x, t) \approx \exp i k_0 (x - v_\varphi t) \exp -i k_0 (x - v_g t) \psi(x - v_g t, 0)$. Ici l'interprétation physique est identique à celle de I.B.1.1.
- b) Pour une particule libre on a alors $\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$ soit $p = m v_g$: c'est le déplacement de l'enveloppe du paquet d'onde qui est associé au déplacement classique de la particule. Ceci est très logique car c'est le paquet qui « localise » la particule à Δx près.
- c) Ce résultat fait intervenir la forme exacte de la relation de dispersion et donc dépend en effet du choix discuté en II.A.4.a. C'est un argument important en faveur de ce choix.

Section B : Particule piégée dans un puits de potentiel

B.1. Puits de potentiel infini :

B.1.1 :

Historiquement, l'expérience de Franck et Hertz qui confirme les idées introduites par Bohr sur les atomes d'hydrogène ou plus simplement les études de spectres de raies de lampes spectrales.

B.1.2 :

- a) $\psi(x)=0$ en dehors de la région $[0, a]$ et donc on a $\psi(0)=\psi(a)=0$.
- b) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ donne, en cherchant les solutions stationnaires $\psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi \Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et donc $\psi = A \cos(kx) + B \sin(kx)$. En appliquant les conditions aux limites $\psi = B \sin(kx), ka = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, la normalisation donne $B^2 \int_0^a \sin^2 kx dx = B^2 a \langle \sin^2 ka \rangle = \frac{B^2 a}{2} = 1$ d'où $B = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

- c) $k_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ et les niveaux d'énergies sont donc discrets.

B.1.3 :

- a) et b) On utilise la relation de Heisenberg, avec une localisation en x sur $[0, a]$ donc $\Delta x < a \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{a}$ et l'énergie minimale $E_1 \sim \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$. On retrouve E_1 à π^2 près, facteur lié à un calcul plus précis de Δx et Δp : ici on maximise Δx et donc on minimise Δp , d'autant plus que ψ n'est pas une gaussienne (c'est à dire que la forme de ψ fait en sorte que Δx soit bien moins que a). C'est donc la localisation dans le puits qui entraîne une valeur non nulle du plus bas niveau d'énergie \Rightarrow phénomène ici purement quantique. La discrétisation provient ici du confinement via les conditions aux limites imposées sur ψ .
- c) $E_1 = 2.4 \times 10^{-18} \text{ J} = 15.2 \text{ eV}$. On retrouve ici des valeurs voisines de l'énergie d'ionisation dans un atome d'hydrogène : le puits infini, modèle simple, fournit déjà les bons ordres de grandeur pour l'évolution de particules confinées.

B.2. Puits de potentiel asymétrique :

B.2.1 :

- a) D'après Schrödinger $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi$, en sommant de part et d'autre de la discontinuité : $\frac{d\psi}{dx}(a+\varepsilon) - \frac{d\psi}{dx}(a-\varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi dx$ l'intégrand étant borné, le second membre $\Rightarrow 0$ quand $\varepsilon \Rightarrow 0$ donc $\frac{d\psi}{dx}$ est continue et donc aussi ψ .

- b) L'équation pour $\psi(x)$ s'écrit (en procédant comme en B.1.2.b) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi = 0$, $0 < a$ $V(x)=0 \Rightarrow \psi(x) = A \sin(qx)$ comme en B.1.2.b car $\psi(0)=0$ et ici $q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

$x > a$ $V(x)=V_0 \Rightarrow E-V_0 < 0 \Rightarrow \psi(x) = B \exp(-x/x_0) + C \exp(x/x_0)$ et $C=0$ pour que ψ puisse être normalisé (pas de divergence quand $x \Rightarrow \infty$). x_0 est donné par

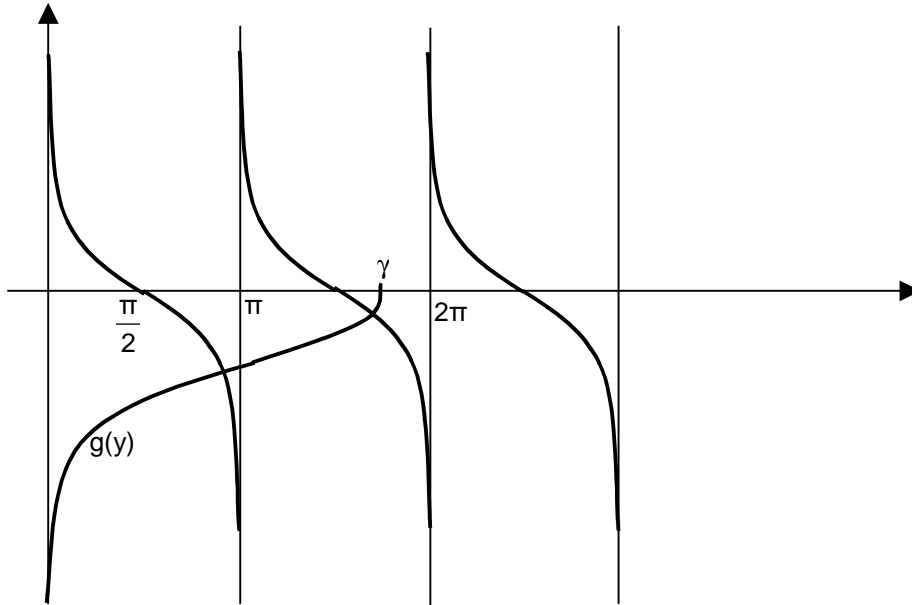
$$\frac{1}{x_0^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$$

- c) x_0 est une longueur de pénétration de la particule dans la partie classiquement interdite, sans équivalent classique. En ELM, on retrouve ce phénomène pour les milieux réactifs (plasma en dessous de la pulsation de coupure) ou dans les phénomènes de réflexion totale frustrée (en ELM mais aussi généralement pour des ondes acoustiques ou autres).

B.2.2 :

- a) $A \sin(qa) = B \exp(-a/x_0)$
 $q A \cos(qa) = -\left(\frac{B}{x_0}\right) \exp(-a/x_0) \Rightarrow \cotan(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$, $y = qa$, $\frac{\hbar^2 \gamma^2}{2ma^2} = V_0$.

- b) La pente de $g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$ en $y = \gamma$ est infinie : $\frac{dg}{dy} = \frac{\gamma^2}{y^2 \sqrt{\gamma^2 - y^2}}$



B.2.3 :

a) La première solution apparaît dès lors que γ franchit la valeur de $\pi/2$ sinon

$$\cotan(\gamma) \text{ et } g(\gamma) \text{ sont de signes contraires } \Rightarrow \gamma_{\text{lim}} = \pi/2 \Leftrightarrow W = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

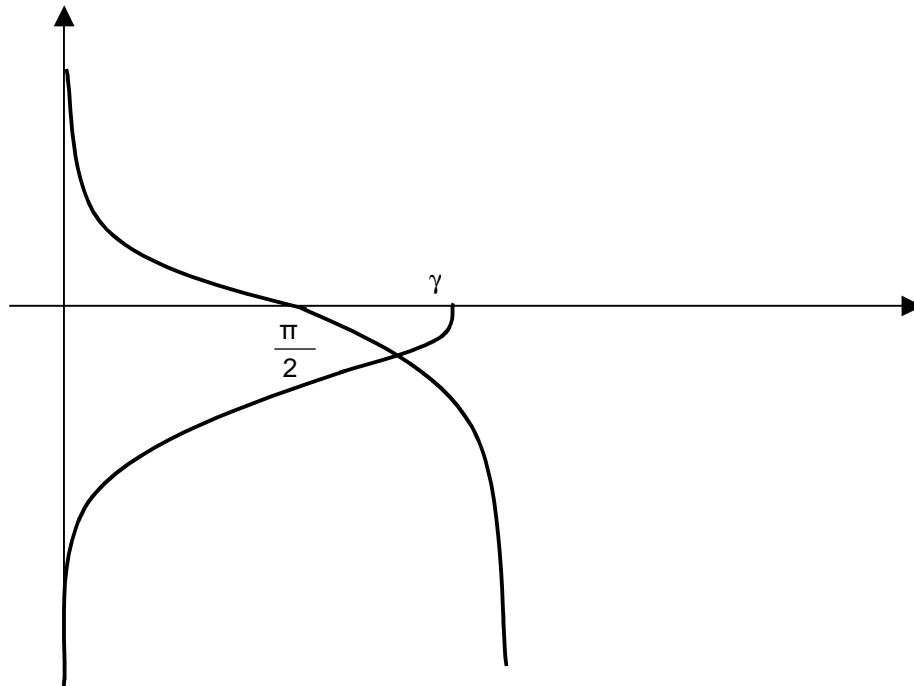
b) L'état lié étant localisé sur environ a , on lui associe, conformément à la relation de Heisenberg $p \sim \Delta p \neq 0$ donnant une énergie cinétique minimale non nulle (cf. B.1.3.ab) qui ne sera inférieure à V_0 (état lié) que pour V_0 suffisant. Ceci est la condition pour un état lié et montre l'existence d'un seuil d'énergie pour avoir un état piégé. On remarque que W est plus petit que E_1 du puits infini, ce qu'on peut attribuer à la localisation moins forte puisque la particule « pénètre » partiellement dans la zone interdite $\Rightarrow \Delta x \uparrow \Leftrightarrow \Delta p \downarrow \Rightarrow E_{c \text{ min}} \downarrow$ aussi.

c) $W = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$.

B.2.4 :

a) $\gamma^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2} W \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{W}\right) \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{W}\right) \Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2\mathcal{E}}{W}\right)$ et donc $\gamma = \frac{\pi}{2} + \delta$ avec $\delta = \frac{\mathcal{E}\pi}{4W}$

b) La solution est ici : $y \approx \gamma$, vu la pente infinie de $g(\gamma)$ en γ .



- c) Alors on a $\cotan(y) = \cotan(\frac{\pi}{2} + \delta) = -\delta$ au premier ordre en δ donc $-y \cotan(y) \approx \frac{\pi}{2} \delta = \sqrt{\gamma^2 - y^2} = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2} \sqrt{V_0 - E}}$ et donc $V_0 - E \approx \frac{\pi^2 \delta^2 \hbar^2}{8ma^2}$ et $\frac{1}{x_0} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} = \frac{\pi \delta}{2a} + O(\delta^2)$. A la limite d'apparition de l'état lié, celui-ci est d'énergie très proche de $V_0 \Rightarrow$ particule quasi-libre d'où la divergence de x_0 .

B.2.5 :

- a) Energie répulsive à très courte distance, puis attractive (interaction forte) de portée finie (a ici) $\mu = (m_p^{-1} + m_n^{-1})^{-1} \approx \frac{m_p}{2} \Rightarrow \mu \approx 8.10^{-28} \text{ Kg}$.
- b) C'est la différence entre l'énergie de l'état lié et celle de l'état dissocié, donc $V_0 - E = 2.2 \text{ MeV}$.
- c) γ est tel qu'il n'y a qu'une seule solution, donc $\gamma \in [\pi/2, 3\pi/2]$.
- d) $V_0 = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2\mu a^2} \Rightarrow \begin{cases} V_0(V_{\text{inf}}) = 47.8 \text{ MeV} \\ V_0(V_{\text{sup}}) = 431 \text{ MeV} \end{cases}$. On a donc $V_0 - E \ll V_0$ ce qui signifie qu'on est

proche du seuil $\gamma \sim \gamma_{\text{inf}}$. En utilisant les relations approchées précédentes, $\delta \approx 0.22 \Rightarrow \epsilon = 0.27 \text{ W}$. On est dans des conditions un peu limites pour appliquer une telle formule-mais c'est parfaitement justifiable dans le cadre de la modélisation discutée ici.

B.2.6 :

- a) Si $V_0 \rightarrow \infty$, γ aussi, et donc le premier solution est donné par $y_1 = q_1 a \approx \pi \Rightarrow q_1 = q_1^0 = \frac{\pi}{a}$: $E_1 \Rightarrow E_1^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ et on retrouve bien sur le résultat de B.1.2.c.

b) $\gamma \gg \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y} \approx \frac{\gamma}{\pi}$, on pose $y = \pi - \delta_1 \Rightarrow \cotan(y) = \cotan(\pi - \delta_1) \approx -\frac{1}{\delta_1} \approx -\frac{\gamma}{\pi}$. On trouve donc $\delta_1 \approx \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow y = q_1 a = \pi(1 - 1/\gamma)$ et donc $E_1 \approx E_1^0(1 - \frac{2}{\gamma})$.

$$2m(V_0 - E) \approx \frac{\hbar^2}{a^2}(\gamma^2 - \pi^2) \Rightarrow x_0 \approx \frac{a}{\gamma}.$$

On obtient $E_1 \approx E_1^0(1 - \frac{2}{\gamma}) < E_1^0$ lorsque γ diminue (prend des valeurs finies), x_0 augmente, ce qui revient à dire que la particule est moins bien localisée que dans un puits infini, à cause de sa pénétration partielle dans la zone $x > a$. Ceci donne lieu alors à une diminution de Δp (Heisenberg) et donc une baisse d'énergie cinétique minimale du premier niveau et donc une diminution de l'énergie totale $E = E_c + V$. Le point important est donc que la délocalisation a pour effet de diminuer l'énergie associée au piégeage conformément aux relations de Heisenberg.

Section C : Double puits

C.1 :

a) On retrouve B.1.2.c et B.2.b.e soit $E_1^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ et $g=2$ car la particule peut être localisée soit dans le puits de gauche, soit dans celui de droite.

b) On avait les solutions à gauche et à droite de la forme

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(q\left[-x + \left(\frac{b+a}{2}\right)\right]\right) = \psi_d \left(\left|x - \frac{b}{2}\right| < \frac{a}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(q\left[x + \left(\frac{b+a}{2}\right)\right]\right) = \psi_g \left(\left|x + \frac{b}{2}\right| < \frac{a}{2}\right)$$

et on obtient $\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_d + \psi_g)$ formes symétrique et antisymétrique.

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_d - \psi_g)$$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s^* \psi_a dx = \int_{-\Delta/2}^{-\Delta/2-a} -\frac{1}{2} \psi_g^2 dx + \int_{\Delta/2}^{\Delta/2+a} \frac{1}{2} \psi_d^2 dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

d) Quand V_0 devient fini, $V(x)$ est paire et donc \hat{H} permute avec l'opérateur de parité \hat{p} . Ils admettent donc une base commune de vecteurs propres d'où le choix de solutions S/A plutôt que d/g ici. C'est-à-dire qu'on attend que la densité de probabilité associée avec des fonctions propres de \hat{H} reflète cette symétrie et donc on choisit S/A .

C.2 :

a) Par symétrie et par analogie avec la partie B, on retrouve les expressions ci-dessous dans les deux puits, et entre les deux on est dans le cas de B.2.1.b avec ici les deux solutions $\exp(\pm x/x_0)$ valables puisque la zone inter-puits est d'extension finie. La solution symétrique conduit donc à $ch(x/x_0)$ et l'antisymétrique à $sh(x/x_0)$. Enfin $E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$, $x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$ comme en B.2.1.b.

b) On vérifie ici la continuité de ψ_S et ψ_A et de leurs dérivées en $x=\pm\Delta/2$. La vérification en $\Delta/2$ suffit à cause de la symétrie des fonctions ψ_S et ψ_A :

$$(S) \begin{cases} \alpha \sin(qa) = \beta ch\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) \\ -\alpha q \cos(qa) = \frac{\beta}{x_0} sh\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) \end{cases} \Rightarrow \tan(qa) = -qx_0 \coth(\Delta/2x_0), \quad (S)$$

$$(A) \begin{cases} \alpha \sin(qa) = \beta sh\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) \\ -\alpha q \cos(qa) = \frac{\beta}{x_0} ch\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) \end{cases} \Rightarrow \tan(qa) = -qx_0 \tanh(\Delta/2x_0), \quad (A)$$

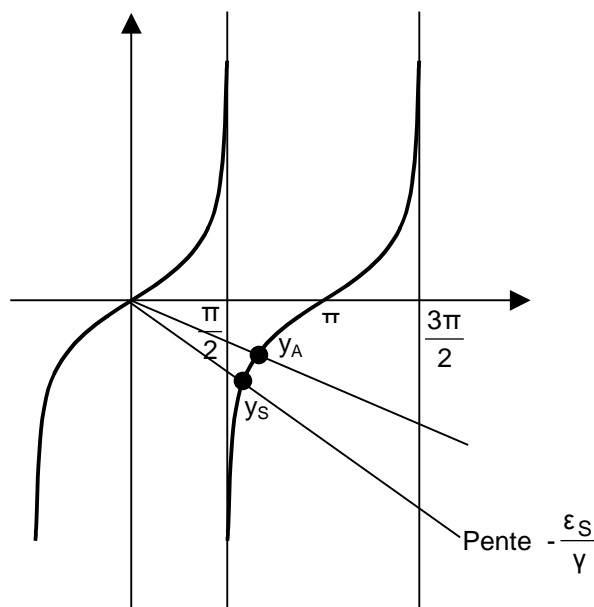
C.3 :

$$a) \begin{cases} \tanh\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) = \frac{1 - \exp(-\Delta/x_0)}{1 + \exp(-\Delta/x_0)} \approx (1 - 2\exp(-\Delta/x_0)) \\ \coth\left(\frac{\Delta}{2x_0}\right) \approx (1 + 2\exp(-\Delta/x_0)) \end{cases}$$

Dans les exponentielles, on peut alors considérer $x_0 \sim \frac{a}{\gamma}$ comme en B.2.6.b et réécrire plus précisément $qx_0 = qa \left(\frac{x_0}{a}\right) = y(\gamma^2 - y^2)^{-1/2}$. D'où l'ensemble des relations demandées.

b) On retrouve les relations de B.2.2 au terme $\varepsilon_{S/A}$ près. Par rapport à la section B ce terme permet une levée de dégénérescence entre les deux premiers niveaux.

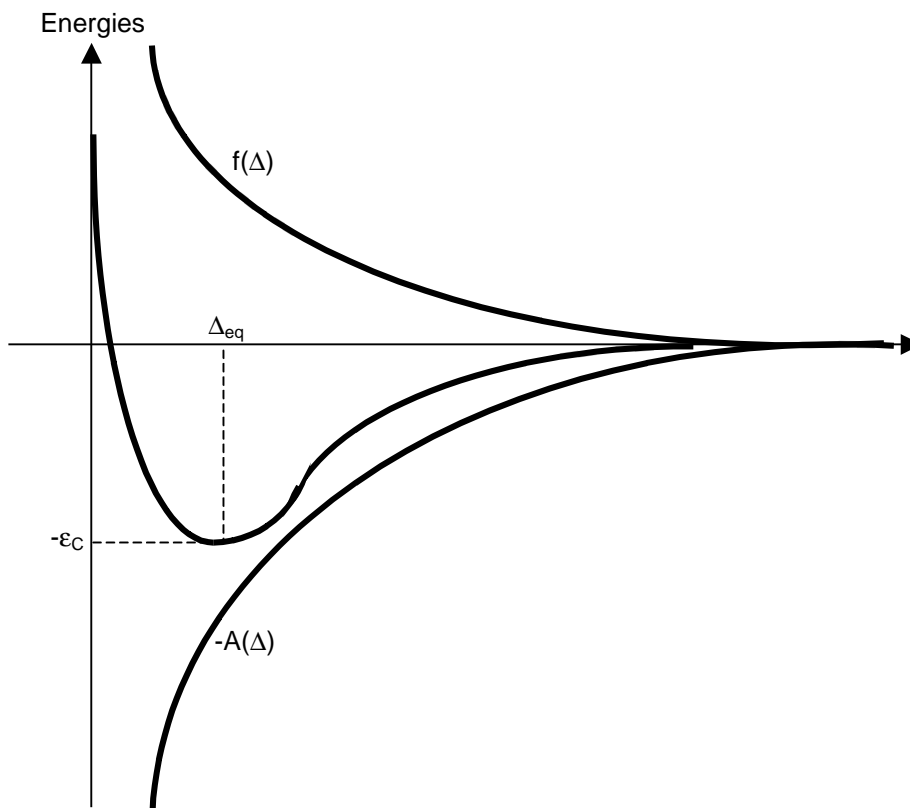
c) $V_0 \gg E \Rightarrow \gamma \gg y$ et donc on peut considérer que $\frac{y}{(\gamma^2 - y^2)^{1/2}} \approx \frac{y}{\gamma}$



- d) Quand $\gamma \rightarrow \infty$, y_S et y_A tendent tous les deux vers $y_0 = \pi$ puisque les pentes des droites sont alors nulles. On pose $y_{S/A} = \pi - \delta_{S/A} \Rightarrow \tan(y_{S/A}) = \delta_{S/A} = -\frac{\pi}{\gamma} \epsilon_{S/A}$
 $\Rightarrow \delta_{S/A} = -\frac{\pi}{\gamma} \epsilon_{S/A}$ et donc $E_{S/A} = \frac{\hbar^2 y_{S/A}^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (1 - \frac{\epsilon_{S/A}}{\gamma})^2 \approx E_1^0 (1 - \frac{2\epsilon_{S/A}}{\gamma})$ et finalement
 $E_{S/A} \approx E_1^0 - A$, $E_1 = E_1^0 (1 - 2/\gamma)$, $A = \frac{4E_1^0}{\gamma} \exp(-\gamma\Delta/a)$
- e) Il y a deux facteurs qui contribuent à l'énergie associée à $\psi_{S/A}$: ψ_S possède un point stationnaire à $x=0$ contrairement à ψ_A . La courbure moyenne de ψ_S est donc inférieure à celle de ψ_A . Comme l'énergie cinétique varie comme p^2 , l'énergie totale est sensible à cette différence de courbure, c'est la raison pour laquelle $E_S < E_A$.
- f) E_S est inférieure à E_1 suite à la délocalisation supplémentaire due au passage et partage de la particule entre les deux puits. (Ici courbure et localisation sont séparées mais en réalité elles sont subtilement liées). Quand Δ diminue le « partage » entre les deux puits augmente (dans la limite où $\Delta \Rightarrow 0$ E_S et E_A deviennent le 1er et 2ème niveau d'un seul puits).

C.4 :

- a) $f(\Delta)$ est une fonction positive décroissante de Δ et $-A(\Delta)$ une fonction négative croissante dont l'influence peut dominer dans les valeurs de Δ intermédiaires. La somme des deux peut alors passer par un minimum pour $\Delta = \Delta_{eq}$



- b) Dans le cas (A), $f(\Delta)$ et $A(\Delta)$ varient dans le même sens \Rightarrow il n'y a pas d'état lié stable dans ce cas et $\Delta \rightarrow \infty$
- c) L'énergie de cohésion est l'énergie à fournir pour passer de $\Delta = \Delta_{eq}$ à $\Delta = \infty$ et elle vaut donc $E_1^0 - E_S(\Delta_{eq}) - f(\Delta_{eq}) = A(\Delta_{eq}) - f(\Delta_{eq})$. Cette énergie est purement quantique.
- d) Exemple : molécule de H_2^+ . La présence de $f(\Delta)$ ne suffit pas à elle seule à assurer la cohésion - il faut aussi la cohérence quantique. L'effet est purement quantique, lié à la délocalisation et au partage de la particule.

C.5 :

- a) $\hat{H}|\psi_A\rangle = (E_1 + A)|\psi_A\rangle$, $\hat{H}|\psi_S\rangle = (E_1 - A)|\psi_S\rangle$ de plus ψ_A et ψ_S sont orthogonaux d'après C.1. et donc \hat{H} est bien représenté par une matrice diagonale.
- b) Dans la partie C1 on a construit ψ_A et ψ_S via les ψ_G et ψ_D de B pour $V_0 = \infty$. Ici on le refait pour V_0 fini. Noter que $\psi_{D/G} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S \pm \psi_A)$ ne sont pas parfaitement nulles dans le puit opposé mais un diagramme suffira pour illustrer l'effet. ($\psi_{D/G}$ deviennent les fonctions de Wannier en physique de la matière condensée).
- c) $\langle \psi_G | \psi_D \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_S | \psi_S \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_A | \psi_A \rangle = 0$ et $\langle \psi_D | \psi_D \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_S | \psi_S \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_A | \psi_A \rangle = 1$ idem pour DG et GG.
- d) $\hat{H}|\psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - A)|\psi_S\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + A)|\psi_A\rangle = E_1|\psi_D\rangle - A|\psi_G\rangle$ de même
 $\hat{H}|\psi_G\rangle = E_1|\psi_G\rangle - A|\psi_D\rangle \Rightarrow \hat{H} = \begin{bmatrix} E_1 & -A \\ -A & E_1 \end{bmatrix} = E_1 \hat{I} - A \hat{T}$ où $\hat{T}|\psi_{G/D}\rangle = |\psi_{D/G}\rangle$, opérateur faisant passer la particule d'un puits à l'autre $\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

C.6 :

- a) A t=0 $\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S + \psi_A)$ et après une durée t quelconque :
 $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-iE_1 t/\hbar) (\psi_S \exp(iAt/\hbar) + \psi_A \exp(-iAt/\hbar))$. Il y a inversion quand la particule se retrouve dans l'état ψ_G c'est à dire
 $\exp(iAt/\hbar) = -\exp(-iAt/\hbar) \Rightarrow \cos(A\tau/\hbar) = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\pi\hbar}{2A}$.
- b) $A \downarrow$ quand $\Delta \uparrow$ et donc $\tau \uparrow$ avec Δ .
- c) Il y a 2 configurations possibles avec les protons d'un côté ou de l'autre de N. Ce sont ces deux configurations qui ici sont modélisées par le système à deux puits.
- d) $A \approx 0.5 \times 10^{-4} eV \Rightarrow \tau \approx 2.1 \times 10^{-11} s$ et $\nu = 24 GHz$ ($\nu = 1/2\tau$) \Rightarrow ceci est la fréquence du maser à ammoniac.