

AGREGATION EXTERNE DE PHYSIQUE.

Solution de l'épreuve C,
proposée par P. DESBIOLLES ; O. JOACHIM.

Première partie : ralentissement, refroidissement et piégeage d'atomes neutres.

1. Forces radiatives.

1.1. Force moyenne s'appliquant sur un atome.

1. Force électrique.

a. Les forces électriques qui s'exercent sur les charges sont : $\vec{F}_q = q\vec{E}(\vec{r}, t)$; $\vec{F}_{-q} = -q\vec{E}(\vec{R}, t)$; $\vec{R} = \vec{0}$.

b. Comme $\left\| \frac{\vec{r}}{R} \right\|$ est faible devant les dimensions caractéristiques des variations du champ électrique, on peut effectuer un développement limité : $\vec{F}_{el} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) - \vec{E}(\vec{R}, t)] = q[\vec{r} \cdot \overline{\text{grad}}]_{\vec{r}=\vec{R}} \vec{E}(\vec{r}, t)$. En faisant apparaître le moment dipolaire électrique, cette relation s'écrit :

$$\vec{F}_{el} = [\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}}]_{\vec{r}=\vec{R}} \vec{E}(\vec{r}, t).$$

2. Force magnétique.

a. Puisque seule la charge q possède un mouvement dans le référentiel considéré, $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)$. A l'ordre le

plus bas : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)$.

b. $\vec{F}_m = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)] - \vec{p} \wedge \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)] - \vec{p} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{R}, t)$.

$$\vec{F}_m = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)] + [\vec{p} \wedge \overline{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t)]_{\vec{r}=\vec{R}}.$$

Explicitons ce dernier résultat en exprimant une composante du deuxième terme dans une base cartésienne.

$$[\vec{p} \wedge \overline{\text{rot}}(\vec{E}(\vec{r}, t))]_{\vec{r}=\vec{R}, i} = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial x_i} E_j - \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial x_j} E_i = p_x \frac{\partial}{\partial x_i} E_x - (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}}) E_{x_i} \Big|_{\vec{r}=\vec{R}}, \text{ ici.}$$

Ce résultat peut encore s'écrire : $\vec{p} \wedge \overline{\text{rot}}(\vec{E}(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}} = (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{E})_{\vec{r}=\vec{R}}(\vec{r}, t) - (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}})_{\vec{r}=\vec{R}} \vec{E}(\vec{r}, t)$.

$$\vec{F}_m = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)] + (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{E})_{\vec{r}=\vec{R}}(\vec{r}, t) - (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}})_{\vec{r}=\vec{R}} \vec{E}(\vec{r}, t).$$

3. Force totale.

En ajoutant les deux contributions, on note une simplification et, finalement :

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_m = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}, t)] + (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{E})_{\vec{r}=\vec{R}}(\vec{r}, t).$$

En prenant la valeur moyenne et en tenant compte du fait que la valeur moyenne sur une période d'une dérivée totale donne 0 pour des fonctions périodiques,

$$\vec{\mathcal{F}} = \langle \vec{F}_{el} + \vec{F}_m \rangle = \left\langle (\vec{p} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{E})_{\vec{r}=\vec{R}}(\vec{r}, t) \right\rangle.$$

1.2. Force dipolaire, force de pression de radiation.

1. Décomposition de la force moyenne.

En notation complexe : $\vec{\mathcal{E}} = E_0(\vec{r}) \vec{e}_x \exp(i(\omega t + \Phi(\vec{r})))$.

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \Re e \left\{ \varepsilon_0 (\alpha' - i\alpha'') E_0(\vec{r}) e^{i(\omega t + \Phi(\vec{r}))} \left[\overline{\text{grad}} \left(E_0(\vec{r}) e^{-i(\omega t + \Phi(\vec{r}))} \right) \right] \right\}_{\vec{r}=\vec{R}}.$$

Epreuve C

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \varepsilon_0 (\alpha' - i\alpha'') E_0(\vec{r}) \left[\overline{\text{grad}}(E_0(\vec{r})) - iE_0(\vec{r}) \overline{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) \right] \right\}_{\vec{r}=\vec{R}} \\ \bar{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2} \Re \left\{ \varepsilon_0 (\alpha' - i\alpha'') E_0(\vec{r}) \left[\overline{\text{grad}}(E_0(\vec{r})) - iE_0(\vec{r}) \overline{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) \right] \right\}_{\vec{r}=\vec{R}} \\ \bar{\mathcal{P}} &= \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_0 \alpha' E_0(\vec{r}) \overline{\text{grad}}(E_0(\vec{r})) \right\}_{\vec{r}=\vec{R}}}_{\bar{\mathcal{P}}_2} + \underbrace{\left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \alpha'' E_0^2(\vec{r}) \overline{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) \right\}_{\vec{r}=\vec{R}}}_{\bar{\mathcal{P}}_1}.\end{aligned}$$

2. Expression de la polarisabilité :

a. Ecrivons la relation de la dynamique¹ à l'électron dans le référentiel de l'atome, supposé galiléen :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2 \vec{r} + q \vec{E}.$$

En multipliant cette équation par q , on obtient une équation sur le moment dipolaire.

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{q^2}{m} \vec{E}_0 \exp(i\omega t).$$

En notation complexe, il vient :

$$\left[\frac{d^2 \vec{\mathcal{P}}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} + \omega_0^2 \vec{\mathcal{P}} = \frac{q^2}{m} \vec{\mathcal{E}} \right].$$

b. En régime forcé, l'équation étant linéaire, on cherche une solution sous la forme : $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_0 \exp i\omega t$.

En injectant cette solution dans l'équation précédente, il vient : $\vec{\mathcal{P}}_0 = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)} \vec{E}_0$.

Or, par définition, $\vec{\mathcal{P}}_0 = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{q^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{i\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)} = \alpha_0 \frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{i\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)}{\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)^2\right)}.$$

Par identification, nous obtenons :

$$\alpha' = \alpha_0 \frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)^2\right)} \quad \text{et} \quad \alpha'' = \alpha_0 \frac{\left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)}{\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)^2\right)}.$$

A présent, on utilise le fait que l'interaction est quasi résonnante, soit : $|\delta| \ll \omega_0$.

$$\begin{aligned}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)^2 &\cong \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)\right]^2 + \left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2 \\ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2}\right)^2 &\cong \left[-\frac{\delta}{\omega_0} \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)\right]^2 + \left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2 = \frac{4\delta^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2.\end{aligned}$$

¹ Ce bilan suggère que nous avons négligé la contribution magnétique de l'onde. Dans le cas d'un mouvement non relativiste, la norme de la contribution magnétique est effectivement plus faible que celle du champ électrique.

Epreuve C

$$\alpha' = \alpha_0 \frac{\left(1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0} + 1\right)^2\right)}{\frac{4\delta^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)^2} \cong \alpha_0 \frac{-\omega_0^2 \frac{\delta}{2\omega_0}}{\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{4}\right)^2}.$$

$$\boxed{\alpha' = \alpha_0 \frac{-\omega_0 \delta}{2\left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{4}\right)^2\right)}}.$$

Au même niveau d'approximation, on obtient, par des calculs analogues :

$$\boxed{\alpha'' = \alpha_0 \frac{\omega_0 \frac{\Gamma}{2}}{2\left(\delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{4}\right)^2\right)}}.$$

c. $\alpha_0 = \frac{q^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$ est la polarisabilité statique de l'atome, c'est à dire celle qu'il acquerrait s'il était placé dans un

champ électrostatique. Il s'agit d'un coefficient homogène à un volume qui vaut ici : $\alpha_0 = 5,47 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3$.

d. Le cortège électronique d'un atome alcalin comporte un électron célibataire sur la dernière couche. Cet électron est le plus faiblement lié à l'atome ce qui permet une bonne interaction avec un champ extérieur. Le dipôle induit possède donc une amplitude optimale.

De plus, des transitions énergétiques se situent, pour cet électron, dans le domaine visible ou du proche infrarouge. Dans l'objectif d'une interaction efficace avec des lasers fonctionnant dans le visible ou le proche infrarouge, les atomes alcalins sont donc d'excellents candidats.

3. Atome immobile dans une onde plane.

a. Dans le cas envisagé ici : $\overline{\text{grad}}(E_0) = \vec{0}$. Or, $\Phi(\vec{r}) = -\vec{k} \cdot \vec{r}$ donc $\overline{\text{grad}}(\Phi(\vec{r})) = -\vec{k}$.

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}}_2 = \vec{0}, \quad \overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}_1 = \frac{\epsilon_0 \alpha'' E_0^2}{2} \vec{k}.$$

b. i.

La puissance de la force magnétique est nulle, donc pour la charge q en mouvement :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_q \cdot \vec{v} = \vec{F}_q \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Au premier ordre : $\mathcal{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t)$, et en prenant la valeur moyenne :

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{d\overline{\mathcal{P}}}{dt} \cdot \overline{\mathcal{E}}^* \right\}_{\vec{r}=\vec{R}}.$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \Re \left\{ i\omega(\alpha' - i\alpha'') \epsilon_0 \overline{\mathcal{E}}(\vec{R}, t) \cdot \overline{\mathcal{E}}^*(\vec{R}, t) \right\} = \frac{1}{2} \Re \left\{ i\omega(\alpha' - i\alpha'') \epsilon_0 E_0^2 \right\}.$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega \alpha'' E_0^2.}$$

ii. N_p est un nombre par unité de temps.

Sachant que l'énergie d'un photon de pulsation ω vaut $\hbar\omega$, alors :

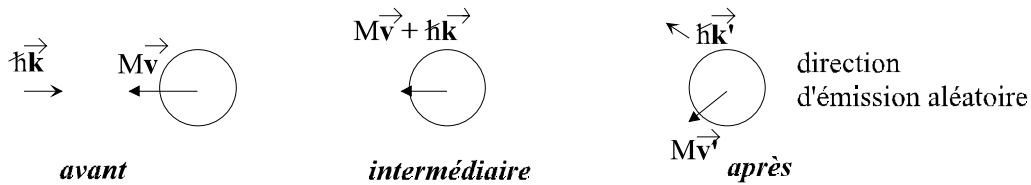
$$\boxed{N_p = \frac{\mathcal{P}}{\hbar\omega} = \frac{\epsilon_0 \alpha'' E_0^2}{2\hbar} \text{ en s}^{-1}.$$

iii. D'après le résultat de la question a. précédente,

$$\boxed{\overline{\mathcal{P}} = N_p \hbar \vec{k}.$$

Epreuve C

iv. On peut résumer schématiquement le processus de la manière suivante :



- $\vec{P}_{at,int} = M\vec{v} + \hbar\vec{k}$.
- $\vec{P}_{at,après} = M\vec{v} + \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}'$. La direction de \vec{u} est aléatoire.

En moyennant sur $N \gg 1$ processus par unité de temps :

$$\langle \Delta \vec{P}_{at} \rangle = N\hbar\vec{k}, \text{ par unité de temps.}$$

Ce résultat équivaut à une force exercée par le laser $\vec{\mathcal{F}} = N\hbar\vec{k}$.

c. Expression de la force en fonction des données expérimentales.

i. L'intensité I associée à une O.P.H. est la moyenne de la norme du vecteur de Poynting²: $I = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$.

ii. En remplaçant α par son expression dans l'expression de la force radiative, il vient :

$$\vec{\mathcal{F}} = \hbar\vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_{sat}} \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ avec } I_{sat} = \frac{\Gamma^2 \hbar c}{2\alpha_0 \omega}. \quad (1)$$

Le profil de cette force quasi-résonnante a une allure lorentzienne centrée sur $\delta = 0$ et de largeur à mi-hauteur Γ .

iii. La quantité $\frac{\|\vec{\mathcal{F}}\|}{\|\hbar\vec{k}\|} = 1/\tau$ est telle que τ est homogène à un temps. Soit, puisque $\|\hbar\vec{k}\|$ représente la quantité de mouvement d'un photon, ce rapport est le nombre de photons absorbés et émis de manière spontanée par un atome, par unité de temps.

iv. L'origine classique du coefficient Γ est purement phénoménologique. Il traduit un amortissement à l'oscillation du dipôle atomique.

A résonance et pour une intensité proche de la valeur de saturation, le rapport précédent se réduit à $1/\tau = \Gamma/2$.

On se retrouve dans la situation étudiée au 1.2.3.b.ii : τ s'interprète comme la durée moyenne du cycle d'absorption – émission spontanée.

Du point de vue quantique, il représente l'inverse de la durée de vie du niveau excité associé à la transition résonnante. Il s'agit également de la largeur spectrale du rayonnement spontané depuis ce niveau.

v. L'ordre de grandeur de la force en question est 10^4 fois plus importante que le poids de l'atome. Il est facilement compréhensible que l'on puisse ainsi ralentir de manière efficace un faisceau d'atomes dans une situation quasi-résonnante. Ce n'est pas tant le transfert d'impulsion d'un photon vers l'atome que le nombre de cycles effectués par seconde qui rend cet effet considérable.

d. Cette force est d'origine magnétique. Elle s'exerce dans le même sens que le vecteur d'onde d'où le nom de pression qui lui est donné.

Nous pouvons citer comme phénomène naturel associé à cette pression, la disposition vis-à-vis du soleil des queues de certaines comètes. L'utilisation de voiles solaires pourrait être envisagée sur le même principe. Signalons également que l'équilibre d'une étoile est également lié à cette pression de radiation. Elle agit à l'opposé de l'effondrement gravitationnel tant que l'étoile possède des réserves énergétiques suffisantes. Des manipulations et notamment des expériences de lévitation d'objets macroscopiques ont été rendues possibles grâce à la lumière puissante des lasers.

2. Ralentiement et refroidissement d'atomes par laser.

2.1. Ralentiement des atomes

² Ou le flux du vecteur de Poynting moyen à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

Epreuve C

1. Pour une température de 100 °C, la vitesse caractéristique est $v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}} \cong 330 \text{ m.s}^{-1}$.

2. a. La fréquence du laser 'vue' par l'atome est décalée par **effet Doppler**. Ce décalage fréquentiel est célèbre en astronomie puisqu'il a permis de comprendre que l'univers actuel était en expansion. L'effet Doppler existe dès qu'un observateur et la source d'une onde ont un mouvement relatif. Citons par exemple le décalage des fréquences acoustiques, largement perceptible par l'oreille humaine, quand une sirène sur un véhicule s'approche ou s'éloigne d'un individu.

b. Le champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp(-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, s'écrit avec $\vec{r} = \vec{v} t$, $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp(-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) t)$.

Ce résultat s'interprète en disant que, dans le référentiel de l'atome, la fréquence du laser est décalée de $-\vec{k} \cdot \vec{v}$.

Pour que l'atome, animé de ce mouvement, soit résonnant avec l'onde laser, il faut que : $\omega + kv = \omega_0$, le vecteur d'onde et le vecteur vitesse ayant des sens opposés. On note u la valeur de cette vitesse.

Si nous utilisons la relation de dispersion : $k = \frac{\omega}{c}$, alors la condition de résonance peut s'écrire :

$$\left| \omega_0 = \omega \left(1 + \frac{u}{c} \right) \right. \Rightarrow \left. \left| \omega = \omega_0 / \left(1 + u/c \right) \right. \right.$$

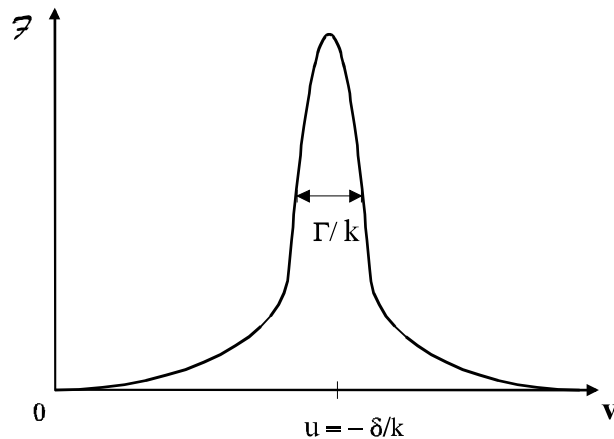
c. Le désaccord δ est négatif et $|\delta|/\omega_0 \cong u/c \ll 1$. Le processus est bien résonnant.

3. En prenant en compte le décalage par effet Doppler dans les calculs de 'force de pression de radiation' :

$$\vec{\mathcal{F}} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(\delta + kv)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

4.

Pour les valeurs numériques proposées, nous obtenons une largeur de courbe $\Delta v = \frac{\Gamma}{k} = 4,68 \text{ m.s}^{-1}$.

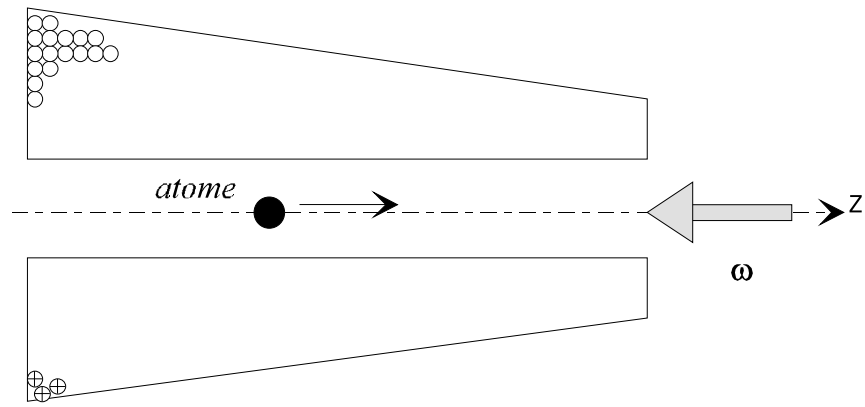


5. On constate donc que, pour une fréquence du laser donnée, seule une classe de vitesses d'atomes de largeur Δu autour de $-\frac{\delta}{k}$ interagit efficacement avec le laser. Pour accorder la fréquence du laser avec des atomes sortant du four à une vitesse égale à la vitesse caractéristique, on doit avoir $\omega - \omega_0 = -k v$. Ce qui se traduit par un décalage en fréquence de -430 MHz .

Lors du processus de ralentissement, l'effet Doppler change. Ainsi, dès que le décalage Doppler n'est plus compatible avec la plage des vitesses Δv , le processus, hors résonance, devient inefficace. De ce point de vue, il paraît impossible de stopper un jet d'atomes voyageant, au départ, à une vitesse de 330 m.s^{-1} .

6. On peut envisager une méthode pour maintenir le système en résonance exploitant l'effet Zeeman. On peut, en effet, modifier la fréquence de la transition atomique de manière à effectivement rester en résonance. Cela est possible grâce à un champ magnétique variant dans l'espace de manière adaptée. L'effet Zeeman en question doit être de plus en plus faible au fur et à mesure que l'atome ralentit. Ainsi, on pourra utiliser un solénoïde long d'épaisseur « linéairement » décroissante.

Epreuve C



Cette configuration conduit à une modification de la pulsation propre de l'atome de la forme : $\omega_0(z) = \omega_0 + \alpha B(z)$. On crée ainsi une modulation spatiale de $B(z)$ de sorte qu'un atome entrant en A et sortant en C reste constamment en résonance avec le laser tout en subissant en permanence une décélération maximale γ_{\max} . Comme au fur et à mesure de sa propagation l'atome ralentit, il est nécessaire que le champ magnétique décroisse linéairement de sorte que le désaccord δ tende vers 0 par valeur négative.

7. Pour $I = I_{\text{sat}}$, l'accélération (décélération) maximale à résonance vaut, en valeur absolue :

$$\gamma_{\max} = \frac{|F_{z,\text{res}}|}{M} = \frac{\hbar k \Gamma}{2M} ; \text{ numériquement } \gamma_{\max} \cong 1,1 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-2}.$$

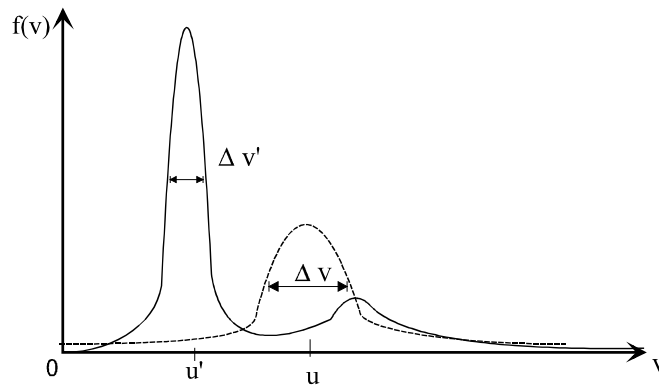
Avec une décélération constante, la vitesse diminue linéairement : $v = u - \gamma_{\max} t$.

Pour passer de la vitesse de 330 m.s^{-1} à 0, il faut un temps : $T = \frac{u}{\gamma_{\max}} = 3,0 \text{ ms}$, correspondant à une distance

d'arrêt $\Delta z = \frac{u^2}{2\gamma_{\max}} = 0,49 \text{ m}$. Ce résultat témoigne d'une efficacité remarquable du processus de ralentissement.

2.2. Refroidissement des atomes.

1.



$f(V)$ symbolise une statistique de répartition des vitesses des atomes du jet suivant la direction z .

A la sortie du four, la courbe de répartition statistique du jet correspond à la courbe la plus à droite.

- Au cours du processus, les atomes subissent un ralentissement se traduisant par une vitesse caractéristique qui diminue. ($u' < u$)
- L'effet du refroidissement se mesure, quant à lui, par la largeur caractéristique de cette fonction de répartition statistique. $\Delta v' < \Delta v$ caractérise le refroidissement du jet de gaz.

La hauteur plus grande de la fonction de répartition est la conséquence de la conservation supposée des atomes au cours des différents processus. Le creux puis la petite bosse sont la traduction que le processus est sélectif en vitesse. Les atomes formant le 'pic' dans la distribution proviennent d'une certaine plage de vitesses.

2. a. En appelant \vec{k}_1 et \vec{k}_2 les vecteurs d'onde respectifs associés aux lasers (1) et (2), on applique les résultats de la question précédente à l'interaction des atomes avec chacun des lasers.

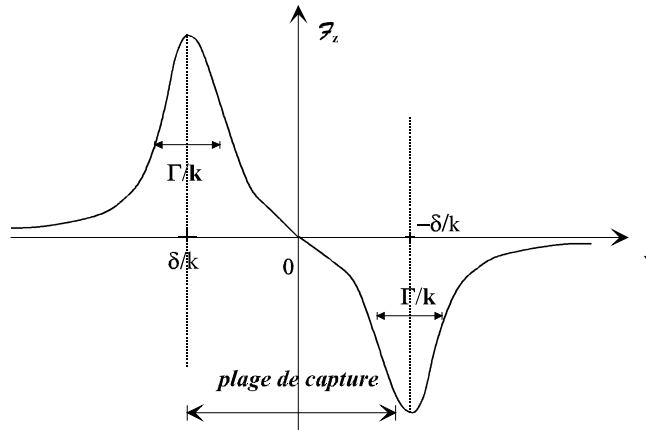
Epreuve C

$$\vec{\mathcal{F}}_1 = \hbar \vec{k}_1 \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2}{4} \frac{1}{\left(\delta - \vec{k}_1 \cdot \vec{v}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} : \text{caractéristique de l'interaction d'un atome avec le laser (1).}$$

$$\vec{\mathcal{F}}_2 = \hbar \vec{k}_2 \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2}{4} \frac{1}{\left(\delta - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} : \text{caractéristique de l'interaction d'un atome avec le laser (2).}$$

b. Comme $\delta < 0$, $|\vec{\mathcal{F}}_1|$ est maximale pour $\vec{k}_1 \cdot \vec{v} = k v = \delta < 0$; c'est l'opposé pour $\vec{\mathcal{F}}_2$.

Sur le schéma suivant, on a représenté la composante suivant z de la force d'interaction résultante :



c. Une variation de la force de signe opposé à la composante de la vitesse conduit à diminuer le mouvement des atomes. Pour les particules appartenant à cette plage, on assiste donc à un amortissement progressif du mouvement, d'où la notion de capture.

La distribution des vitesses, en se 'resserrant', permet un refroidissement. La largeur de cette plage est :

$$\Delta v_{\text{cap}} = \frac{2|\delta|}{k} = \frac{|\delta| \lambda_L}{\pi}.$$

d. Un atome 'capturé' est soumis à l'équivalent d'une force de friction qui va tendre à l'immobiliser. On obtient ainsi un regroupement d'atomes de vitesses proches de zéro.

e. Afin d'étudier la dynamique d'un atome 'capturé', il est nécessaire de simplifier l'expression de la résultante des forces. Comme le suggère l'énoncé, on se contente de travailler sur des atomes ayant déjà une vitesse faible. Cela signifie concrètement que nous ne prenons en compte que les atomes situés au centre de la plage de capture.

Mathématiquement, $|kv| \ll |\delta|$; nous allons ainsi procéder à un développement limité de $\vec{\mathcal{F}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \hbar k \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2}{4} \left[\frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} - 2\delta kv + k^2 v^2} - \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\delta kv + k^2 v^2} \right] \\ \mathcal{F} &= \hbar k \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2}{4} \left[\frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} - 2\delta kv} - \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\delta kv} \right] = \hbar k \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2}{4} \left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right) \left[\frac{1}{1 - \frac{2\delta kv}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}} - \frac{1}{1 + \frac{2\delta kv}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}} \right] \\ \mathcal{F} &= \hbar k \frac{\Gamma}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2 \delta kv}{\left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)^2}. \end{aligned}$$

Epreuve C

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un atome au centre de la plage de capture, on obtient bien les résultats de l'énoncé. Le désaccord est négatif, donc le processus physique décrit bien une décélération.

$$\frac{dv}{dt} = \hbar k \frac{\Gamma}{2M} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2 \delta k}{\left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)^2} v = -\xi v \quad \text{avec} \quad \xi = -\frac{4\delta \hbar k^2}{M} \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2/4}{\left(\delta^2 + \Gamma^2/4\right)^2}.$$

f. La 'friction' maximale est obtenue, pour une intensité à saturation, dans une situation où la norme de la force est maximale par rapport à δ .

Ce qui nous amène à étudier la dérivée de ξ par rapport à δ . Un calcul élémentaire montre que cela se produit

pour : $\delta = -\frac{\Gamma}{2\sqrt{3}}$. Dans cette situation, nous obtenons, $\xi_{\text{max}} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \frac{\hbar k^2}{M}$.

Numériquement, $\frac{1}{\xi_{\text{max}}} = 16 \mu\text{s}$, ce qui donne une idée de la rapidité du processus.

g. Dans le cas d'un désaccord positif, il n'y aurait aucune capture d'atomes autour d'une vitesse nulle. Il ne pourrait y avoir ni ralentissement ni refroidissement. Plus précisément, c'est l'effet Doppler qui est à l'origine du refroidissement. A vitesse nulle, un atome absorbe autant de photons du laser (1) que du laser (2). Quand l'atome se déplace vers la droite, l'effet Doppler est ajusté de sorte que l'atome absorbe plus de photons du laser (2) que du laser (1). Il est donc ramené vers une vitesse nulle. (idem pour un déplacement vers la gauche en inversant le rôle des lasers). Si le signe du désaccord change, l'effet Doppler change et au lieu d'être refroidi, le système se réchauffe.

3. Température minimale.

a.i. En reprenant les résultats de la question 2.2.2.e., nous pouvons écrire : $\frac{d}{dt} p = -\xi p$, en supposant que l'on

travaille sur la composante algébrique de la quantité de mouvement.

En multipliant membre à membre cette égalité par p et en faisant la moyenne, il vient :

$$\left[\frac{d}{dt} p^2 \right]_{\text{refr}} = -2\xi p^2.$$

ii. Si seul ce processus intervenait, on atteindrait une température nulle.

b.i. Cette diffusion provoque un étalement de la distribution des vitesses.

ii. Le pas de cette marche au hasard correspond à $\Delta p = \hbar k$.

iii. En reprenant l'intervalle de temps moyen entre deux émissions spontanées de l'atome. Il vient donc, puisque l'atome est soumis à deux lasers :

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

iv. Compte tenu de la distribution statistique fournie :

$$\langle p^2 \rangle_{\text{diff}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \mathcal{P}(p,t) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(p,t) dp} = \frac{-\frac{d}{da} \left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right]}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}; \quad a = \frac{\tau}{2\hbar^2 k^2 t}.$$

$$\left[\frac{d}{dt} \langle p^2 \rangle \right]_{\text{diff}} = \frac{2\hbar^2 k^2}{\tau}.$$

c. A l'équilibre, l'échauffement dû aux fluctuations des forces compense le refroidissement. Soit, pour $I = I_{\text{sat}}$:

$$\langle p^2 \rangle_{\text{eq}} = \frac{\hbar^2 k^2}{\tau \xi} = -\frac{M\hbar \left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)}{2\delta}.$$

d. Concernant la température, pour ce problème unidimensionnel, nous pouvons écrire :

Epreuve C

$$\frac{k_B T_{\text{eq}}}{2} = \frac{\langle p^2 \rangle_{\text{eq}}}{2M} = -\frac{\hbar \left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right)}{4\delta}.$$
$$T_{\text{eq}} = \frac{-\hbar}{2k_B \delta} \left(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right).$$

e. La température minimale, appelée la ‘température Doppler’, correspond à la valeur minimale de la température par rapport au désaccord. Dans ce cas, il est facile de voir que la ‘température Doppler’ est obtenue quand $\delta_{\text{min}} = -\frac{\Gamma}{2}$.

$$T_{\text{min}} = \frac{\hbar \Gamma}{2k_B} = 144 \mu\text{K}.$$

Comme nous pouvons le constater, la température est extrêmement basse.

Nous pouvons calculer la dérivée seconde pour vérifier qu’il s’agit bien d’un minimum : $\frac{\partial^2 T}{\partial \delta^2} = -\frac{\hbar \Gamma^2}{4k_B \delta^3} > 0$.

f. Avec trois paires de lasers, on aurait par extension du résultat précédent : $\frac{3k_B T_{\text{eq}}}{2} = \frac{\langle p^2 \rangle_{\text{eq},3D}}{2M}$ car on a alors

rajouté deux degrés de liberté équivalents dans le système. Mais la diffusion en impulsion n’est pas non plus la même à trois dimensions qu’à une dimension puisque deux degrés de liberté supplémentaires sont permis. Finalement, la température Doppler reste la même.

g. Dans le cadre des expériences, des valeurs plus faibles ont été obtenues. Ceci montre que certains effets n’ont pas été pris en compte dans le modèle. On peut supposer que des degrés de liberté internes peuvent avoir un rôle non négligeable dans ce processus.

h. Dans tous les cas, il faut considérer le système global atomes – photons.

La quantité de mouvement totale de même que l’énergie sont bien conservées. Ces grandeurs sont simplement redistribuées par l’intermédiaire de l’émission spontanée. Bien que la quantité de mouvement et l’énergie totale des atomes diminuent, l’excès de ces grandeurs est évacué par les photons de fluorescence.

Enfin, concernant l’entropie, celle des atomes diminue au cours du refroidissement. En revanche, les photons émis de manière spontanée vers des modes vides du champ électromagnétique accroissent considérablement l’entropie des photons qui, initialement, appartenaient aux modes des champs des lasers. Dans la mesure où le processus est globalement irréversible, l’entropie totale du système atomes – photons doit donc augmenter.

3. Piégeage d’atomes neutres.

3.1. Piégeage magnétique.

1. Les atomes alcalins possèdent un électron célibataire, ce qui leur confère un caractère paramagnétique.

2. L’énergie potentielle d’interaction entre un moment magnétique et un champ magnétique est : $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

3. a. $W_{\parallel} = W_- = -\mu_B B$ et $W_{\text{anti}\parallel} = W_+ = \mu_B B$.

b. La configuration stable étant celle pour laquelle l’énergie potentielle est minimale. Il paraît donc plus intéressant de travailler avec une configuration « parallèle » afin de réaliser un piégeage. Ce dernier aurait lieu au niveau du maximum de la valeur de B.

c. D’après le théorème de Wing, la norme du champ magnétique ne présente aucun maximum. Il est donc impossible de piéger les atomes dans une configuration parallèle stable.

d. Dans la mesure où l’on désire piéger les atomes, il faut donc créer une configuration présentant un minimum local du champ magnétique et préparer les atomes avec un moment magnétique « antiparallèle » au champ \vec{B} . Mais cette situation étant instable, il faut empêcher le moment magnétique de se retourner sous l’effet de l’agitation thermique ou des collisions. C’est une des raisons pour lesquelles le minimum de B ne doit pas être nul. De plus, cette configuration permet à un atome passant au voisinage du centre de la zone du piège de ne pas ressentir de variation brutale du champ magnétique, évitant ainsi les transitions non adiabatiques de Majorana.

3.2. Piège de Ioffe-Pritchard.

1. Pour réaliser un minimum local du champ magnétique avec deux bobines identiques, il faut les écarter d’une distance supérieure à la configuration de Helmholtz.

2.

Epreuve C

a. Il faut vérifier : $\text{div}(\vec{B}) = 0$ et $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{0}$. Grâce à la linéarité des opérateurs, il est possible de le vérifier indépendamment sur chacun des champs.³

b. A l'ordre souhaité : $|\vec{B}|^2 = C_1^2 + 2C_1C_3z^2 + (C_2^2 - C_1C_3)\rho^2$.

c. Le long de Oz : Le coefficient C_1 est positif car on prend l'axe Oz parallèle à la composante de \vec{B}_1 du champ créé par les deux bobines parcourues par des courants $I' > 0$.

d. Pour avoir un minimum de $|\vec{B}|^2$ le long de Oz, il faut avoir $C_1C_3 > 0$. On en déduit donc que $C_3 > 0$.

e. Confinement radial : Pour avoir un minimum de $|\vec{B}|^2$ en $\rho = 0$, il faut que $C_2^2 - C_1C_3 > 0$. Comme C_1 et C_3 sont positifs, il faut que C_2 vérifie : $|C_2| > \sqrt{C_1C_3}$. Le champ créé par les fils doit donc être suffisamment intense.

f. Dans la configuration d'un moment magnétique antiparallèle, l'énergie potentielle d'interaction magnétique vaut : $\mu_B \mathbf{B}$. Dans l'hypothèse où les atomes se trouvent à proximité de leur zone de confinement, à savoir $\rho = 0$ et $z = 0$, il est légitime de faire un développement limité de la racine carré de l'expression écrite plus haut. En ne conservant que les premiers termes (quadratiques) du développement, il vient sans difficulté :

$W = \mu \left[C_1 + C_3z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_2^2}{C_1} - C_3 \right) \rho^2 \right]$. Comme on peut toujours redéfinir une énergie potentielle à une

constante additive près, il est possible de définir une énergie potentielle de type harmonique par :

$$W = \mu_B \left[C_3z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_2^2}{C_1} - C_3 \right) \rho^2 \right]. \quad (2)$$

g. Ce dernier résultat est de la forme : $W = \frac{M}{2} \omega_z^2 z^2 + \frac{M}{2} \omega_\rho^2 \rho^2$. Par simple identification :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2\mu_B C_3}{M}} \text{ et } \omega_\rho = \sqrt{\frac{\mu_B}{M} \left(\frac{C_2^2}{C_1} - C_3 \right)}.$$

h. Application numérique : $\omega_\rho / 2\pi = 199 \text{ Hz}$; $\omega_z / 2\pi = 20 \text{ Hz}$.

³ Rapellons l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right) \vec{e}_z.$$

⁴ Notons que les critères de confinement se retrouvent dans la définition de ces pulsations.

Deuxième partie :
Condensation de Bose – Einstein dans un piège harmonique.

1. Condensation dans un potentiel tridimensionnel isotrope.

1.1. Population de l'état fondamental et des états excités.

1. Le niveau fondamental est non dégénéré car il n'y a qu'un choix possible pour ce niveau : $n_x = n_y = n_z = 0$.

$N_0 = \left(\frac{1}{\Lambda^{-1} e^{\beta E} - 1} \right) (E = 0)$. La fugacité Λ est définie par $\Lambda = \exp(\beta\mu)$, on a :

$$\boxed{N_0 = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda}}.$$

2. Comme N_0 est une grandeur positive, cela implique une fugacité inférieure à 1 et donc un potentiel chimique négatif.

3. Pour n fixé, choisissons n_x en lui donnant une valeur appartenant à 0, 1, ..., n . n_x étant choisi, on doit avoir :

$$n_y + n_z = n - n_x.$$

Il y a alors $n - n_x - 1$ possibilités pour le couple $\{n_y, n_z\}$:

$\{n_y, n_z\} = \{0, n - n_x\}, \{1, n - n_x - 1\}, \{2, n - n_x - 2\}, \dots, \{n - n_x, 0\}$. La dégénérescence vaut donc :

$$g(n) = \sum_{n_x=0}^n (n - n_x + 1) = (n + 1) \sum_{n_x=0}^n (1) - \sum_{n_x=0}^n (n_x) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

$$\boxed{g(n) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}}.$$

4. Pour passer à la densité d'état, en supposant possible de définir une répartition énergétique continue, on écrit : $g(n)dn = \rho(E)dE$ qui représente un nombre d'états infinitésimal regardé soit en variable n soit en variable E .

$$\rho(E) = g(n) \frac{dn}{dE} = \frac{1}{2\hbar\omega} \left(\frac{E}{\hbar\omega} + 1 \right) \left(\frac{E}{\hbar\omega} + 2 \right).$$

En développant, il vient : $\rho(E) = \rho_1(E) + \rho_2(E) + \rho_3(E)$, avec

$$\rho_1(E) = \frac{1}{\hbar\omega}, \quad \rho_2(E) = \frac{3}{2} \frac{E}{(\hbar\omega)^2}, \quad \rho_3(E) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{(\hbar\omega)^3}.$$

5. Population des niveaux excités.

a.
$$N_{1e} = \int_{\frac{\hbar\omega}{2}}^{\infty} \rho_1(E) f(E) dE = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\frac{\hbar\omega}{2}}^{\infty} \frac{dE}{\Lambda^{-1} e^{\beta E} - 1} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\frac{\hbar\omega}{2}}^{\infty} \frac{\Lambda e^{-\beta E} dE}{1 - \Lambda e^{-\beta E}}.$$

En posant $x = \beta E$,
$$N_{1e} = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \int_{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}^{\infty} \frac{\Lambda e^{-x} dx}{1 - \Lambda e^{-x}} = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \int_{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^j e^{-jx} dx = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^j \int_{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}^{\infty} e^{-jx} dx.$$

$$N_{1e} = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^j}{j} \exp\left(-\frac{j\hbar\omega}{2k_B T}\right) = \frac{k_B T}{\hbar\omega} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\Lambda \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \right]^j}{j}.$$

On reconnaît le développement de Taylor de la fonction logarithme népérien. Il vient :

$$\boxed{N_{1e} = -\frac{k_B T}{\hbar\omega} \ln \left[1 - \Lambda \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \right]}.$$

b. De même :

$$N_{2e} = \int_0^{\infty} \rho_2(E) f(E) dE = \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \int_0^{\infty} \frac{E dE}{\Lambda^{-1} e^{\beta E} - 1}$$

Epreuve C

$$N_{2e} = \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty E dE \frac{\Lambda e^{-\beta E}}{1 - \Lambda e^{-\beta E}} = \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty E dE \sum_{j=1}^\infty (\Lambda e^{-\beta E})^j .$$

En permutant la somme et l'intégrale : $N_{2e} = \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \sum_{j=1}^\infty \Lambda^j \int_0^\infty \frac{u du e^{-u}}{(\beta j)^2} = \frac{3}{2(\hbar\omega)^2} \sum_{j=1}^\infty \frac{\Lambda^j}{(\beta j)^2} \Gamma(2) ;$

où l'on a posé $u = \beta j E$. $N_{2e} = \frac{3(k_B T)^2}{2(\hbar\omega)^2} \sum_{j=1}^\infty \frac{\Lambda^j}{(j)^2} .$

$$\boxed{N_{2e} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(\Lambda) .}$$

Enfin $N_{3,e} = \int_0^\infty \frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3} \frac{1}{\Lambda^{-1} e^{\beta E} - 1} dE ,$

En introduisant la variable $x = \beta E$, nous faisons apparaître sous l'intégrale : $\frac{\Lambda e^{-x}}{1 - \Lambda e^{-x}} = \sum_{j=1}^\infty (\Lambda e^{-x})^j$, puisque le terme général de la série précédente est de module strictement inférieur à 1. En posant, $u = jx$, il vient :

$$N_{3,e} = \frac{(k_B T)^3}{2(\hbar\omega)^3} \sum_{j=1}^\infty \frac{\Lambda^j}{j^3} \int_0^\infty du u^2 e^{-u} .$$

Comme $\int_0^\infty du u^2 e^{-u} = \Gamma(3) = 2$, et en utilisant la fonction de Bose numéro 3, on obtient,

$$\boxed{N_{3e} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda) .}$$

En conclusion :

$$\boxed{N_e = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda) + \frac{3}{2} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 g_2(\Lambda) - \frac{k_B T}{\hbar\omega} \ln \left(1 - \Lambda \exp \left[-\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right] \right) .}$$

c. Compte tenu de l'hypothèse $k_B T \gg \hbar\omega$ et puisque les fonctions de Bose sont bornées supérieurement par 1, il

apparaît que le terme dominant de cette expression est le premier. Donc : $\boxed{N_e = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda) .}$

1.2. Condensation.

1. La relation 4 : $N = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda} + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda)$ distingue bien la contribution du niveau fondamental et des niveaux excités. Au-dessus de la température de condensation, comme $k_B T \gg \hbar\omega$, les atomes, obéissant alors à une statistique de Boltzmann, se trouvent en quasi-totalité sur les niveaux excités et donc :

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda) . \quad (\text{relation R})$$

Lorsque la température diminue à nombre total d'atomes constant, il faut que la fonction de Bose prenne des valeurs de plus en plus grandes. Or, il est dit que les **fonctions de Bose sont monotones croissantes** et qu'elles prennent leurs **valeurs maximales** pour $\Lambda = 1$. Au seuil de condensation, c'est-à-dire quand les niveaux excités suffisent à peine à contenir la population totale des atomes, la fugacité vaut donc 1.

A une température T, un majorant du terme considéré est donc : $\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1) .$

2. En diminuant la température vers la température critique, le terme dominant qui représente la population des états excités, aurait tendance à diminuer. Toutefois, cette décroissance est compensée, tant que cela est possible, par une augmentation de la fugacité et donc de la fonction de Bose. A la température critique, les niveaux excités

Epreuve C

suffisent à peine à contenir les N atomes et la fonction de Bose a atteint son maximum. Le nombre N correspond à ce moment au majorant évoqué à la question précédente. La fugacité tend vers 1.

3. Au seuil du phénomène de condensation, la majorité des atomes est encore dans des niveaux excités qui sont « saturés ». (Toute nouvelle diminution de la température fera croître prodigieusement la population du fondamental) . La température seuil s'exprime donc par la relation :

$$N = \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1) \quad (\text{relation R}')$$

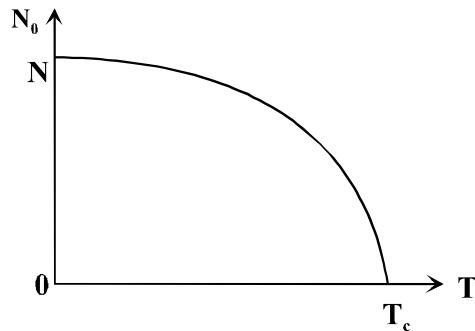
4. En dessous de la température critique, les niveaux excités ne suffisent plus à contenir la population des N atomes. Le niveau fondamental se peuple alors de manière macroscopique puisque la fonction de Bose a atteint sa valeur maximale.

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1).$$

5. Ce résultat se réécrit, grâce à la relation (R) sous la forme :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3.$$

La représentation sommaire est :



Le taux de population du niveau fondamental joue le rôle de paramètre d'ordre dans cette transition de phase.

6.a. $T_c = 0,7 \mu\text{K}$. Il faut donc des processus de refroidissement sub-Doppler pour atteindre la condensation.

b. On a : $\frac{k_B T_c}{\hbar\omega} \cong N^{1/3}$, $\frac{k_B T_c}{\hbar\omega} \cong 100$. Ce qui légitime l'hypothèse de travail.

c. Si N_1 est la population du premier niveau excité et N_0 la population du fondamental, évaluons le rapport $\frac{N_1}{N_0}$.

Pour se fixer les idées, on prend $N_0 = N/2$.

Ce qui permet d'évaluer Λ dans ces conditions : $\Lambda = \frac{N}{N+2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{N}} \cong 1 - \frac{2}{N}$.

Soit E_1 , l'énergie du premier niveau excité, on a : $N_1 \cong \frac{\Lambda e^{-\beta E_1}}{1 - \Lambda e^{-\beta E_1}}$.

Le phénomène n'étant pas un effet thermique, un développement limité de $e^{-\beta E_1}$ est possible.

Avec la valeur de Λ évaluée précédemment, $N_1 \cong \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)(1 - \beta E_1)} \cong \frac{1}{\frac{2}{N} + \beta E_1}$.

Or, βE_1 est de l'ordre de $N^{-\frac{1}{3}}$, et est donc prépondérant devant $\frac{2}{N}$. Ainsi, $N_1 \cong N^{\frac{1}{3}}$. Finalement :

$$\frac{N_1}{N_0} \cong N^{-\frac{2}{3}} \cong 10^{-4} .$$

Epreuve C

Ce rapport est infiniment petit devant 1. Cela montre sans aucune ambiguïté une dégénérescence énergétique sur le niveau fondamental, signature de la condensation de Bose-Einstein. Le phénomène est donc quantique ; il ne s'agit pas d'un effet thermique.

Dans le cas d'une statistique de Boltzmann : $\frac{N_1}{N_0} \cong \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{k_B T}\right) \cong \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \cong 1$ si $E_1 \ll k_B T$.

7. Comme T_c évolue en $N\omega^3$, son expression reste inchangée par passage à la limite thermodynamique.

1.3. Energie interne totale.

1. La grande fonction de partition.

Par définition, $Z_G = \prod_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \Lambda e^{-\beta E_p}} \right]$. En prenant le logarithme népérien, il vient, en traitant le niveau

fondamental à part :

$$\ln(Z_G) = -\ln(1 - \Lambda) - \sum_{p \neq 0} g_p \left(\ln(1 - \Lambda e^{-\beta E_p}) \right).$$

La somme est évaluée par passage au continu, à l'aide de la densité d'états dont on ne prend que le terme dominant.

$$\ln(Z_G) = -\ln(1 - \Lambda) - \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 \int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 - \Lambda e^{-x}).$$

Comme Λe^{-x} est plus petit que 1, on développe le logarithme en faisant apparaître $\int_0^{\infty} dx x^2 e^{-jx} = \frac{\Gamma(3)}{j^3} = \frac{2}{j^3}$:

$$\ln(Z_G) = -\ln(1 - \Lambda) + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(\Lambda).$$

2. Par définition, et grâce au choix de la fugacité comme variable thermodynamique indépendante plutôt que le potentiel chimique, $U = -\frac{\partial(\ln(Z_G))}{\partial\beta} = k_B T^2 \frac{\partial(\ln(Z_G))}{\partial T}$, expression très simple pour un calcul dans l'ensemble grand canonique. En effectuant la dérivation, grâce aux relations (R) et (R') et puisqu'en dessous du seuil de condensation, les fonctions de Bose prennent leurs valeurs maximales, il vient :

$$U = 3k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(\Lambda), \text{ soit :}$$

$$U(T \leq T_c) = 3k_B T N \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(1)}{g_3(1)} \quad \text{et} \quad U(T \geq T_c) = 3k_B T N \frac{g_4(\Lambda)}{g_3(\Lambda)}.$$

3. Quand $T \gg T_c$, le résultat précédent donne une énergie interne qui tend vers $3Nk_B T$ puisque le rapport des fonctions de Bose tend vers 1.

Il s'agit du résultat du théorème d'équipartition pour un gaz parfait classique possédant six termes quadratiques d'énergie, trois termes d'énergie cinétique et trois termes d'énergie potentielle.

4. Capacité thermique.

a. Grâce aux calculs précédents, il vient, par simple dérivation :

$$C(T < T_c) = 12Nk_B \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(1)}{g_3(1)}.$$

$$C(T > T_c) = 3Nk_B \left(\frac{\partial}{\partial T} \left[T \frac{g_4(\Lambda)}{g_3(\Lambda)} \right] \right)_N = 3Nk_B \left[\frac{g_4(\Lambda)}{g_3(\Lambda)} + T \left(\frac{dg_4}{g_3 d\Lambda} - g_4(\Lambda) \frac{dg_3}{g_3^2 d\Lambda} \right) \frac{d\Lambda}{dT} \right].$$

Epreuve C

Au-dessus du seuil de condensation, une simple différentielle de la relation (R) donne, à N constant :

$$\frac{dg_3}{g_3} = -3 \frac{dT}{T} ; \quad \frac{dg_3}{d\Lambda} = -3 \frac{g_3}{T} \frac{dT}{d\Lambda} = \frac{g_2(\Lambda)}{\Lambda} ; \quad \frac{d\Lambda}{dT} = -3 \frac{\Lambda}{T} \frac{g_3(\Lambda)}{g_2(\Lambda)} . \text{ Soit :}$$

$$\left[C(T > T_c) = 3Nk_B \left(4 \frac{g_4(\Lambda)}{g_3(\Lambda)} - 3 \frac{g_3(\Lambda)}{g_2(\Lambda)} \right) \right] .$$

b. Au voisinage de la transition,

$$C(T_c^-) = 12Nk_B \frac{g_4(1)}{g_3(1)} . \text{ et } C(T_c^+) = 3Nk_B \left(4 \frac{g_4(1)}{g_3(1)} - 3 \frac{g_3(1)}{g_2(1)} \right) .$$

Il existe donc une discontinuité de la capacité thermique à la température critique qui vaut :

$$\left[\Delta C = 9Nk_B \left(\frac{g_3(1)}{g_2(1)} \right) \right] .$$

c. Il s'agit d'une transition du deuxième ordre.

2. Description et excitations du condensat.

2.1. Equation de Gross-Pitaevskii stationnaire ; limite de Thomas – Fermi.

1. En prenant pour énergie potentielle, l'expression de celle d'un oscillateur harmonique : $V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M\omega^2 (\vec{r})^2$

2. Dans l'approximation de Thomas - Fermi, le terme d'énergie cinétique devient négligeable et l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire devient une équation algébrique facile à résoudre. Nous sommes donc amenés à

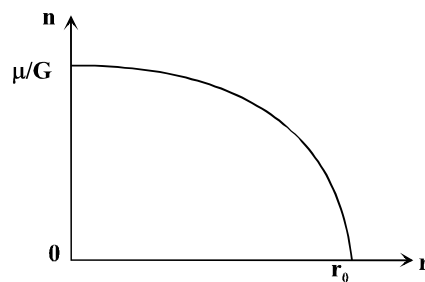
résoudre l'équation : $\frac{1}{2} M\omega^2 (\vec{r})^2 \varphi(\vec{r}) + G(\varphi(\vec{r}))^3 = \mu \varphi(\vec{r}) .$

Implicitement, nous avons supposé que la fonction d'onde était réelle. Ce qui fait :

$$\left[\varphi(\vec{r}) \right]^2 = \frac{1}{G} \left[\mu - \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \right] .$$

3. La densité de particules vaut, quant à elle, $n(r) = \varphi^2(\vec{r})$. Ce qui nous donne : $n(r) = \frac{1}{G} \left[\mu - \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \right]$.

Elle a une forme parabolique qui part de la valeur $\frac{\mu}{G}$ en $r = 0$ et qui s'annule pour $r_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{M\omega^2}}$.



4. La condition de normalisation de la fonction d'onde est : $\int d^3r [\varphi(\vec{r})]^2 = N .$

Ce qui conduit, en reprenant la valeur de la fonction d'onde calculée précédemment et en utilisant l'élément de

volume en coordonnées sphériques, à : $4\pi \int_0^{r_{\text{max}}} dr r^2 \frac{1}{G} \left[\mu - \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 \right] = N .$ Soit, en reprenant la valeur de r_{max} :

$$\left[\mu = \frac{M\omega^2}{2} \left(\frac{15GN}{4\pi M\omega^2} \right)^{\frac{2}{5}} \right] .$$

Epreuve C

5. En utilisant le fait que $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$, il est possible d'évaluer E. En prenant nulle la constante d'intégration :

$$E(N) = \frac{5M\omega^2}{14} \left(\frac{15G}{4\pi M\omega^2} \right)^{\frac{2}{5}} N^{\frac{7}{5}}.$$

6.a. La parabole inversée correspond précisément à l'expression de la densité d'atomes $n(r)$ obtenue à la question précédente. On remarque par ailleurs que les interactions sont capitales dans la forme du condensat. Par ailleurs, celles-ci sont répulsives puisqu'elles « gonflent » le condensat.

b. On peut lire un rayon du condensat de 35 à 40 μm .

c. En prenant la masse correspondant à la masse des atomes de sodium, on trouve, suivant les valeurs du rayon, un potentiel chimique compris entre $3,78 \cdot 10^{-31}$ J et $4,94 \cdot 10^{-31}$ J.

d. D'après les calculs précédents, il est possible de relier simplement μ et E : $E(N) = \frac{5}{7}\mu N$. Ce qui conduit à une énergie variant, selon le rayon mesuré au départ, entre $2,16 \cdot 10^{-26}$ J et $2,82 \cdot 10^{-26}$ J. Ces valeurs, ramenées à l'énergie par particule, conduisent à E/N compris entre 20 nK et 26 nK. Comme nous pouvons le constater, la dernière valeur correspond à la première colonne du tableau fourni dans la question suivante.

7. Entre traçant en double échelle logarithmique l'énergie par particule et le nombre de particules, on trouve une droite de coefficient directeur proche de 2/5 ce qui est en accord avec la formule de la question 3.1.5.⁵

3.2. Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

1. Dans le cas où le potentiel ne dépend pas du temps, l'équation est découplée entre les variables spatiales et la variable temporelle. Il convient de choisir une solution de la forme : $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r})\chi(t)$.

En injectant cette solution dans l'équation dépendant du temps, il apparaît que $\varphi_0(\vec{r})$ est solution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire tandis que $\chi(t)$ vérifie : $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = \mu\chi(t)$.

On obtient donc, en supposant que $\chi(t)$ prendra la forme d'une simple phase : $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}}$.

2. **Linéarisation** : Si la partie dépendant du temps est très petite devant la partie stationnaire, il est légitime de rechercher des solutions sous la forme :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) e^{-i\frac{\mu t}{\hbar}} \text{ avec } \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r}, t).$$

En reportant ces quantités dans l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, il vient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V_0(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}, t) - \mu + G \left| \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) \right|^2 \right] \tilde{\varphi}(\vec{r}, t).$$

Si on note ε l'infiniment petit caractérisant le rapport $\frac{\delta V}{V_0}$, alors $\delta\varphi$ est aussi au moins d'ordre 1 en ε .

Reportons $\tilde{\varphi}(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r}, t)$, dans l'équation précédente et identifions aux différents ordres.

A l'ordre 0 en ε , on retrouve l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire vérifiée par $\varphi_0(\vec{r})$.

A l'ordre 1 en ε , on trouve

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\varphi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V_0(\vec{r}) - \mu + 2G \left| \varphi_0(\vec{r}, t) \right|^2 \right] \delta\varphi(\vec{r}, t) + G\varphi_0^2(\vec{r}) \delta\varphi^* + \delta V(\vec{r}, t) \varphi_0(\vec{r}).$$

L'évolution de $\delta\varphi$ est couplée à celle de $\delta\varphi^*$.

⁵ Voir à la fin de la solution pour la courbe.

Epreuve C

Pour obtenir une équation linéaire, on introduit le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix}$.

En prenant l'équation complexe conjuguée de l'équation précédente, on peut ranger sans difficulté le système obtenu en introduisant une matrice (2,2), notée \mathcal{L}_{GP} de telle sorte que :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{GP} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{S}^* \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$\mathcal{L}_{GP} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2 & \mathbf{G}\varphi_0^2(\vec{r}) \\ -\mathbf{G}\varphi_0^{*2}(\vec{r}) & -\left[\mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2\right] \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta(\vec{r}) + \mathbf{V}_0(\vec{r}),$$

et $\begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^* \end{pmatrix}$ un terme source avec $\mathbf{S} = \delta\mathbf{V}(\vec{r}, t)\varphi_0(\vec{r})$. Ce qui démontre l'égalité de l'énoncé.

3. Excitations élémentaires.

a. Cherchons à présent un vecteur propre $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ de \mathcal{L}_{GP} de valeur propre $\hbar\omega$. Le condensat a été excité par une perturbation qui est ensuite coupée et il vibre à la pulsation ω . On a donc $\mathbf{S} = 0$ et le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} \left[\mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2 \right] \mathbf{u}(\vec{r}) + \mathbf{G}\varphi_0^2(\vec{r})\mathbf{v}(\vec{r}) = \hbar\omega \mathbf{u}(\vec{r}) \\ -\mathbf{G}\varphi_0^{*2}(\vec{r})\mathbf{u}(\vec{r}) - \left[\mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2 \right] \mathbf{v}(\vec{r}) = \hbar\omega \mathbf{v}(\vec{r}) \end{cases}$$

On pourrait alors facilement vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de valeur propre $-\hbar\omega$.

ω étant réel, la solution la plus générale de pulsation ω s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \beta \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Si l'on souhaite que les deux composantes $\delta\varphi$ et $\delta\varphi^*$ soient complexes conjuguées l'une de l'autre, il faut que $\beta = \alpha^*$. Comme \mathbf{u} et \mathbf{v} ne sont connus qu'à une constante multiplicative près on peut choisir $\alpha = \beta = 1$:

$$\delta\varphi(\vec{r}, t) = \mathbf{u}(\vec{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{v}^*(\vec{r})e^{i\omega t}.$$

Venons-en maintenant au cas particulier d'un gaz homogène vibrant dans une boîte sans potentiel extérieur.

Chercher $\delta\varphi$ sous la forme d'une « onde plane », en prenant par exemple \mathbf{u} sous la forme $\mathbf{u}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, revient en fait à chercher, dans l'expression générale précédente, des variations de \mathbf{u} et de \mathbf{v} en \vec{r} sous la forme $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

Comme $\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta$, on obtiendra dans les équations aussi bien pour \mathbf{u} que pour \mathbf{v} : $\mathbf{H}_0\mathbf{x}(\vec{r}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2M}\mathbf{x}(\vec{r})$. Donc, en reprenant le système linéarisé, nous sommes ramenés à :

$$\begin{cases} \left[\mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2 \right] \mathbf{u} + \mathbf{G}\varphi_0^2(\vec{r})\mathbf{v} = \hbar\omega \mathbf{u} \\ -\mathbf{G}\varphi_0^{*2}(\vec{r})\mathbf{u} - \left[\mathbf{H}_0 - \mu + 2\mathbf{G}|\varphi_0(\vec{r})|^2 \right] \mathbf{v} = \hbar\omega \mathbf{v} \end{cases}$$

Pour un gaz parfait homogène, on a $\varphi_0(\vec{r}) = \sqrt{N/L^3}$ et donc $\frac{N}{L^3} = n_0$. Comme, de plus, $\mu = n_0\mathbf{G}$.

Le système précédent devient alors :

Epreuve C

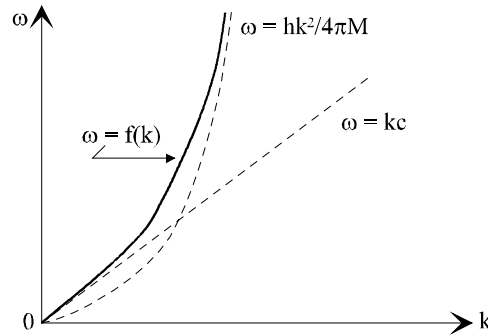
$$\begin{cases} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + G n_0 - \hbar \omega \right] u + G n_0 v = 0 \\ -G n_0 u - \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + G n_0 + \hbar \omega \right] v = 0 \end{cases} .$$

Pour que ce système ait une solution autre que la solution identiquement nulle, on est amené à annuler son déterminant.

Ce qui nous conduit à l'équation : $\hbar^2 \omega^2 - \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + G n_0 \right)^2 + G^2 n_0^2 = 0$. Qui se résout en :

$$\boxed{\omega(k) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + 2n_0 G \right)}} . \quad (\text{relation de dispersion des excitations élémentaires})$$

b. Deux cas limites peuvent apparaître naturellement lors de l'analyse de la formule précédente :



- Limite des très courtes longueurs d'onde : dans ce cas, les vecteurs d'onde sont très grands et le résultat précédent s'écrit : $\hbar \omega \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$. L'énergie cinétique domine et on retrouve une excitation libre.

- Limite des très grandes longueurs d'onde : dans ce cas, le terme d'interaction est dominant et l'on peut négliger l'énergie cinétique dans le terme entre parenthèses : $\hbar \omega \simeq \sqrt{\frac{G n_0}{M}} \hbar k$. Il s'agit d'une relation de dispersion linéaire attestant d'un caractère non dispersif des phénomènes ondulatoires au sein du condensat. Par analogie avec l'approximation acoustique, cette relation met en évidence une célérité caractéristique $c = \sqrt{\frac{G n_0}{M}}$, la célérité du son dans le condensat.

2.3. Analogies hydrodynamiques.

1. L'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps s'écrit, en faisant directement apparaître la densité d'atomes :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi(\vec{r}, t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \varphi(\vec{r}, t) + n(\vec{r}, t) G \varphi(\vec{r}, t) .$$

D'après la définition de la densité de particules, on a : $\frac{\partial n}{\partial t} = \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$.

En écrivant l'équation complexe conjuguée de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps et en ajoutant les équations obtenues, correctement multipliées par φ et φ^* , on a :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} n = -\frac{\hbar^2}{2M} [\varphi^* \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi^*]} .$$

2.

Epreuve C

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\sqrt{n}) \right) e^{iS} + \sqrt{n} e^{iS} \left(i \overrightarrow{\text{grad}}(S) \right),$$

$$\Delta(\varphi) = \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \right) = \left[\Delta(\sqrt{n}) \right] e^{iS} + 2i \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\sqrt{n}) \right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right) e^{iS} - \sqrt{n} e^{iS} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right)^2 + i \sqrt{n} e^{iS} \left(\Delta(S) \right),$$

on en déduit :

$$\varphi^* \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi^* = 4i \sqrt{n} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(\sqrt{n}) \right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right) + 2i n \left(\Delta(S) \right) = 2i \left(\overrightarrow{\text{grad}}(n) \right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right) + 2i n \left(\Delta(S) \right) = 2i \text{div} \left[n \overrightarrow{\text{grad}}(S) \right]$$

En reportant cette expression dans la formule encadrée ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \text{div} \left[n \left(\frac{\hbar}{M} \overrightarrow{\text{grad}}(S) \right) \right] = 0 .$$

Si on introduit formellement le champ des vitesses : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{M} \overrightarrow{\text{grad}}(S(\vec{r}, t))$, il apparaît que l'équation précédente est l'analogie d'une équation locale de conservation de la masse en hydrodynamique :

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \text{div} \left[n(\vec{v}) \right] = 0 .$$

3. Toujours grâce à la forme particulière choisie pour φ , on a également :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{n} e^{iS} \right) = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{n} \right) e^{iS} - \hbar \sqrt{n} \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS} . \text{ Il vient :}$$

$$2i n \frac{\partial S}{\partial t} = \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t} \varphi^* \right) . \quad (F)$$

Le membre de gauche se calcule à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps et de sa complexe conjuguée. Compte tenu des résultats précédents,

$$i\hbar \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\varphi^* \Delta \varphi + \varphi \Delta(\varphi^*) \right] + 2V_{\text{ext}} |\varphi|^2 + 2G |\varphi|^4 = -\frac{\hbar^2}{2M} 2\sqrt{n} \left(\Delta(\sqrt{n}) \right) + \frac{\hbar^2}{2M} 2n \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right)^2 + 2n V_{\text{ext}} + 2G n^2$$

En reportant ce dernier résultat dans la formule (F), on en déduit :

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n}) - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(S) \right)^2 - V_{\text{ext}} - G n .$$

En prenant le gradient des deux membres de cette équation et en se rappelant de la définition du champ des vitesses, on aboutit à la relation :

$$M \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} M v^2 - V_{\text{ext}} - G n \right) .$$

Cette équation est l'analogie d'une **équation d'Euler en hydrodynamique**. Le membre de gauche traduit la force due à l'accélération 'locale' du 'fluide équivalent' ; dans le membre de droite, on trouve la 'pression quantique' $-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n})$, le terme d'inertie dû à l'accélération convective, dans un cas irrotationnel, et les forces extérieures et intérieures qui s'appliquent au système autres que la 'pression quantique'.

4.a. On introduit un régime statique d'équilibre et on travaille sur des perturbations de cette situation d'équilibre.

Le travail accompli ici est l'analogie de la linéarisation habituelle des équations de l'hydrodynamique dans l'approximation acoustique.

L'équilibre est caractérisé par :

$$\begin{cases} n_0(\vec{r}) = \frac{1}{G} \left[\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right] \\ \vec{v}_0(\vec{r}) = \vec{0} \end{cases} ,$$

En ne gardant que les termes linéaires en δn et $\delta \vec{v}$ dans les équations, on aboutit au système suivant :

