

Introduction

1. Pulsations caractéristiques d'un plasma

La fréquence plasma est la fréquence d'oscillation libre des électrons ou des ions quand ils ont été soumis à une petite perturbation de densité.

La gyrofréquence est la fréquence de rotation autour du champ magnétique d'un électron ou d'un ion.

2. Les équations du mouvement pour les ions et les électrons ("équations fluides")

Les équations du type $\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$, sont des équations de conservation de la matière: intégrées sur un petit volume elles signifient que la diminution du nombre de particules dans le volume est égale au flux de particules à travers la surface qui entoure le volume (il n'y a pas de création de particules).

La deuxième équation : $n_i m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + n_i m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_i) = -\vec{\nabla}(p_i) + n_i q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \vec{P}_{ei}$ est analogue pour la quantité de mouvement. On peut la voir comme l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour une unité de volume. Le premier membre est la dérivée convective de la quantité de mouvement le long de la trajectoire de ce petit élément. Le second membre est constitué des différentes forces volumiques : force due au gradient de pression, force électromagnétique, force de frottement entre les ions et les électrons.

Première partie Émissions aurorales des planètes du Système Solaire

I. Émission

1.a $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{e}_r}{r^2}$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire le long de \overrightarrow{OP} .

1.b On calcule $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en utilisant le formulaire donné dans l'introduction, sachant que le moment dipolaire est un vecteur constant.

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{M} \times \vec{e}_r}{r^2} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{M} \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \right) - (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} M \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} M \left(\cos \theta \left(-\frac{2}{r^3} \vec{e}_r \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\vec{e}_\theta}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

1.c Le calcul du module est immédiat: $B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$. Sachant qu'à la distance R et à l'équateur

($\theta = \pi/2$), le champ vaut B_e , on calcule la constante qui est en facteur : $B = B_e \frac{R^3}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$

$$2. f_{ce} = \frac{eB}{2\pi m_e} = \frac{e}{2\pi m_e} B_e \frac{R^3}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

En supposant que l'émission se fait au pôle : $f_{ce} = \frac{e}{2\pi m_e} B_e \frac{R^3}{r^3} 2 = \frac{e B_e}{\pi m_e} \frac{R^3}{r^3}$

3. A l'altitude d'émission on a donc $r = 2R$ et $f_{ce} = \frac{eB_e}{\pi m_e} \frac{1}{8} = 0,710^{10} B_e$

Planète	Mercure	Terre	Jupiter	Saturne
D , distance au Soleil (en UA, unité astronomique)	0,4	1	5,2	9,5
B_e , champ à la surface de la planète à l'équateur (en T)	$0,003 \cdot 10^{-4}$	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-4}$
f_{ce} (kHz)	2,1	220	3000	150

4. Les appellations des émissions sont données en fonction de leurs longueurs d'onde, il faut donc calculer $\lambda = c/f$.

Planète	Mercure	Terre	Jupiter	Saturne
D , distance au Soleil (en UA, unité astronomique)	0,4	1	5,2	9,5
λ (m)	$1,4 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^3$	100	$2 \cdot 10^3$
ordre de grandeur	100 km	km	hectomètre	km

On retrouve donc bien les ordres de grandeur conformes aux observations.

II. Propagation des ondes électroniques

1. Étude des modes de propagation

1.a $\rho = e(n_i - n_e)$ et $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$.

1.b Le système d'équations fluides se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \\ n_e m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v}_e) = -n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) \end{cases}$$

On complète par les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

1.c On développe et on simplifie le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_{e0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_{e1}) = 0 \\ n_{e0} m_e \frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -n_{e0} e (\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = -\mu_0 e n_{e0} \vec{v}_{e1} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{-e n_{e1}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

1.d Si on suppose que toutes les grandeurs sont donc proportionnelles à $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, cela revient à remplacer partout $\vec{\nabla}$ par $i\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ par $-i\omega$.

On obtient donc:

$$\begin{cases} -i\omega n_{e1} + n_{e0} i\vec{k} \cdot \vec{v}_{e1} = 0 \\ -i\omega n_{e0} m_e \vec{v}_{e1} = -n_{e0} e (\vec{E}_1 + \vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -i\omega \vec{B}_1 = -i\vec{k} \times \vec{E}_1 & i\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{B}_1 = -\mu_0 e n_{e0} \vec{v}_{e1} - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}_1 & i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = \frac{-en_{e1}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

2. Relation de dispersion des ondes

2.a On peut calculer la vitesse en fonction du champ électrique à partir de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{v}_{e1} = -i \frac{\omega \epsilon_0 \mu_0}{\mu_0 e n_{e0}} \vec{E}_1 - \frac{i}{\mu_0 e n_{e0}} \vec{k} \times \vec{B}_1 = -i \frac{\omega \epsilon_0}{e n_{e0}} \vec{E}_1 - \frac{i}{\mu_0 e n_{e0}} \vec{k} \times \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_1 \right)$$

$$\text{soit } \vec{v}_{e1} = -i \frac{\omega}{\omega_{pe}^2} \frac{e}{m_e} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} (\vec{e}_x \cdot \vec{E}_1) \vec{e}_x + \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \vec{E}_1 \right)$$

Il suffit de reporter cette expression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour éliminer la vitesse. Pour faire ce calcul, le plus simple est de projeter sur les axes:

$$\vec{v}_{e1} \times \vec{B}_0 = -i \frac{\omega \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \left(\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) E_{1y} \vec{e}_x - E_{1x} \vec{e}_y \right)$$

et donc:

$$i\omega m_e (-i) \frac{\omega}{\omega_{pe}^2} \frac{e}{m_e} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} E_{1x} \vec{e}_x + \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \vec{E}_1 \right) = e \left(\vec{E}_1 - i \frac{\omega \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \left(\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) E_{1y} \vec{e}_x - E_{1x} \vec{e}_y \right) \right)$$

En réarrangeant cette équation on la met sous la forme:

$$\left(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 \right) \vec{E}_1 + k^2 c^2 E_{1x} \vec{e}_x + i\omega \omega_{ce} \left(\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) E_{1y} \vec{e}_x - E_{1x} \vec{e}_y \right) = 0$$

Ce système de 3 équations à 3 inconnues est homogène et n'a donc de solution non nulle que si son déterminant est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 & i\omega \omega_{ce} \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) & 0 \\ -i\omega \omega_{ce} & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 \end{vmatrix} = 0$$

2.b Mode ordinaire (mode O) : c'est celui dont la relation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$. Il est polarisé suivant l'axe z, c'est-à-dire parallèlement au champ magnétique. Sa polarisation est rectiligne. On constate que quand k tend vers 0, la fréquence tend vers la fréquence plasma. Il n'est jamais possible d'avoir une fréquence inférieure à la fréquence plasma, la fréquence plasma est donc fréquence de coupure du mode.

2.c

$$\text{La relation de dispersion des deux autres modes s'écrit } \begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 & i\omega \omega_{ce} \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \\ -i\omega \omega_{ce} & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Pour trouver leur fréquence de coupure on cherche les solutions pour $k = 0$.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 & i\omega\omega_{ce} \\ -i\omega\omega_{ce} & \omega^2 - \omega_{pe}^2 \end{vmatrix} = 0 = (\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 - \omega^2\omega_{ce}^2$$

La résolution de cette équation donne deux solutions : $\omega = \frac{\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \pm \omega_{ce}}{2}$

On suppose que $\omega_p < \omega_c$ et on appelle mode Z celui qui a la pulsation de coupure la plus basse et mode X celui qui a la pulsation de coupure la plus haute, donc :

$$\omega_X = \frac{\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} + \omega_{ce}}{2} \text{ et } \omega_Z = \frac{\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} - \omega_{ce}}{2}$$

2.d Pour trouver les polarisations, il faut reporter ces solutions dans l'équation du champ électrique, sachant que le champ électrique est forcément dans le plan (x, y).

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_{pe}^2)E_{1x} + i\omega\omega_{ce}E_{1y} = 0 \\ -i\omega\omega_{ce}E_{1x} + (\omega^2 - \omega_{pe}^2)E_{1y} = 0 \end{cases}$$

Pour le mode X : $\omega^2 - \omega_{pe}^2 = \omega_X\omega_{ce}$ et donc
$$\begin{cases} \omega_X\omega_{ce}E_{1x} + i\omega\omega_{ce}E_{1y} = 0 \\ -i\omega\omega_{ce}E_{1x} + \omega_X\omega_{ce}E_{1y} = 0 \end{cases}$$

On en déduit $E_{1y} = iE_{1x}$. Le champ électrique tourne dans le sens direct par rapport au champ magnétique, c'est donc un mode droit. Le mode Z donne le signe contraire et est donc un mode gauche. Notons que les deux modes ont une partie de leur polarisation le long de x, c'est-à-dire du vecteur d'onde, une composante qui est donc longitudinale. Cette composante est appelée par les plasmiciens "électrostatique".

2.e Le comportement asymptotique du mode O quand k tend vers l'infini est facile à déterminer, il se rapproche du mode de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide : $\omega = kc$.

Pour les deux autres il faut écrire la relation de dispersion :

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2c^2) - \omega^2\omega_{ce}^2 \left(1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) = 0$$

Quand k tend vers l'infini, on peut la simplifier en

$$(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 - k^2c^2) - \omega_{ce}^2(\omega^2 - k^2c^2) = 0$$

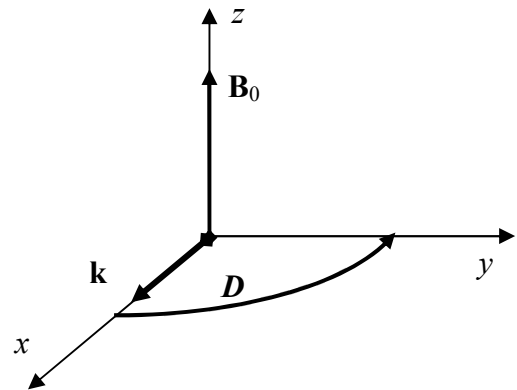
Équation qui a deux solutions :

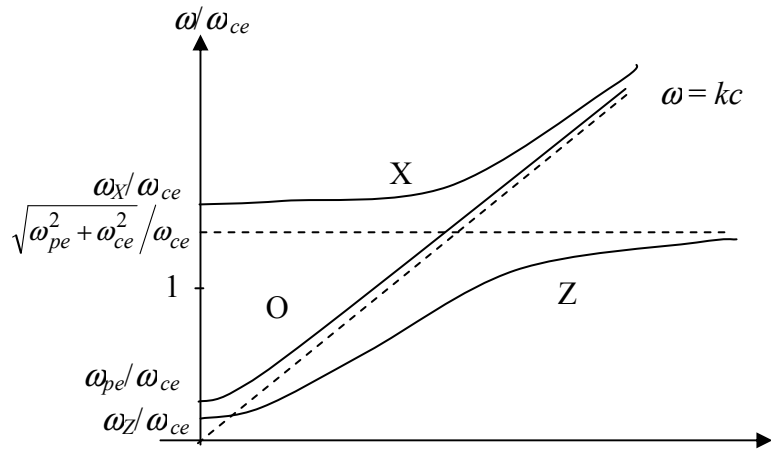
$$\begin{cases} \omega = kc \\ \omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \end{cases}$$

On retrouve donc la même asymptote que pour le mode O et une asymptote horizontale.

2.f Pour tracer le diagramme de dispersion, ω/ω_{ce} en fonction de k en identifiant les trois modes X, O, Z, il faut classer les fréquences de coupure. On vérifie que si $\omega_p < \omega_c$, on a aussi $\omega_Z < \omega_p < \omega_X$.

On a aussi $\omega_{pe} < \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} < \omega_X$.





2.g Pour qu'une onde puisse se propager en s'éloignant de la planète, il faut que le rapport ω/ω_{ce} puisse tendre vers l'infini, on voit que le mode Z ne permet pas cela. Deux modes sont donc observables a priori loin de la planète, O et X.

3. Mode de propagation du rayonnement auroral

3.a La fréquence plasma vaut 28,6 kHz, la gyrofréquence électronique varie de 280 à 209 kHz. La ligne rouge est donc le tracé de la gyrofréquence des électrons.

3.b La zone où l'intensité est la plus forte se situe vers 20h33. Si on suppose que l'intensité des ondes décroît quand on s'éloigne de la source, on peut conclure qu'on est dans la source à 20h33.

3.c D'après la question 2.g, on peut penser que la propagation a lieu soit sur mode O, soit sur le mode X. Comme la fréquence plasma est très inférieure à la gyrofréquence électronique, on peut préciser les valeurs des coupures de ces deux modes : la coupure du mode X est très proche de la gyrofréquence, alors que celle du mode O est égale à la fréquence plasma. Comme les ondes ne sont observées qu'au-dessus de la gyrofréquence, il est très vraisemblable que les ondes observées se propagent sur le mode X. L'analyse de la polarisation des ondes (qu'on ne peut pas faire ici) confirme que la polarisation des ondes observées est circulaire droite et donc conforme à celle du mode X.

4. Propagation dans le vent solaire

4.a En régime stationnaire l'équation de conservation des particules dans le vent solaire s'écrit : $\vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$, soit $\frac{d}{dr} (r^2 n_e v_{er}) = 0$. On en déduit donc que la densité varie en $1/D^2$.

4.b Le champ magnétique dans le vent solaire est proportionnel à $\frac{1}{D} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{D^2}}$, donc la gyrofréquence varie de la même manière en fonction de D . La fréquence plasma est proportionnelle à la racine carrée de la densité et donc varie en $1/D$.

On en déduit donc que
$$\frac{f_{ce}}{f_{pe}} = \frac{f_{ce}}{f_{pe}}(Terre) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{D^2}} \approx \frac{f_{ce}}{f_{pe}}(Terre) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{D^2}}$$

4.c Sachant que la densité du vent solaire vaut $5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$ au niveau de l'orbite de la Terre et le champ magnétique 5 nT ($D = 1 \text{ UA}$), on peut calculer le rapport f_{ce}/f_{pe} à la Terre : $\frac{f_{ce}}{f_{pe}}(Terre) = 7 \cdot 10^{-3}$.

Planète	Mercure	Terre	Jupiter	Saturne
D , distance au Soleil (en UA, unité astronomique)	0,4	1	5,2	9,5
f_{ce}/f_{pe}	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

4.d L'onde se propage dans le vent solaire sur le mode sur lequel elle a été émise au voisinage de la planète, c'est-à-dire le mode X. On constate que lorsque le rapport f_{ce}/f_{pe} est petit la pulsation de coupure du

mode X, $\omega_X = \frac{\sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} + \omega_{ce}}{2}$, est peu différente de ω_{pe} .

4.e Il suffit donc de calculer la fréquence plasma dans le vent solaire aux différentes distances et de comparer aux fréquence d'émission déjà calculées et qui sont reportées ici dans le tableau.

La fréquence plasma à l'orbite de la Terre vaut $f_{pe} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$, soit 20,1 kHz pour une densité de $5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$. Les autres se calculent en tenant compte de la variation en $1/D$ de la fréquence plasma.

Planète	Mercure	Terre	Jupiter	Saturne
D , distance au Soleil (en UA, unité astronomique)	0,4	1	5,2	9,5
f_{pe} (kHz)	50	20	3,8	2,1
Fréquence d'émission (kHz)	2,1	220	3000	150

On constate que les ondes émises ont toutes une fréquence d'émission supérieure à la fréquence de coupure locale dans le vent solaire, sauf dans le cas de Mercure. Ceci explique qu'on observe à distance sans problème les rayonnements émis par les planètes géantes et la Terre, mais pas ceux émis par Mercure.

5. Observation par les radiotélescopes au sol

5.a L'atmosphère est de plus en plus dense quand on s'approche de la surface de la Terre. Le rayonnement venant du haut est de plus en plus absorbé en descendant et donc de moins en moins efficace. Il est donc logique que l'efficacité de l'ionisation présente un maximum à distance du sol.

5.b L'ionosphère présente donc aussi une coupure pour les ondes radio venant de l'espace. On peut calculer l'ordre de grandeur de cette coupure : 3 MHz pour une densité maximum de $2 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$.

On constate donc qu'on peut observer le rayonnement émis par Jupiter au sol, c'est ce qui est fait par le radiotélescope de Nançay (réseau décimétrique). Par contre le rayonnement émis par la Terre est totalement coupé par l'ionosphère, il a donc fallu attendre les missions spatiales qui se sont élevées au-dessus de l'ionosphère pour découvrir ce rayonnement auroral.

Deuxième partie Magnétohydrodynamique et physique solaire

1. Le cadre général de la MHD

1.a Si on néglige le courant de déplacement on a alors $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$. Ceci entraîne que $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

L'équation de conservation de la charge électrique devient donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Ceci implique $e(n_i - n_e)$ est une constante ; comme le plasma est électriquement neutre initialement, il l'est toujours. Même en présence de perturbations le retour à l'électroneutralité est plus rapide que tous les autres phénomènes considérés.

1.b Comme la masse des électrons est négligeable devant celle des ions, on peut écrire $\vec{v} = \vec{v}_i + \frac{m_e}{m_i} \vec{v}_e$. Si les deux populations ont des vitesses comparables, comme la vitesse électronique est multipliée par le rapport des masses, elle peut être négligée, on a donc $\vec{v} \approx \vec{v}_i$.

En écrivant la définition de la densité de courant, on obtient $\vec{v}_e = \vec{v}_i - \frac{\vec{j}}{ne}$.

1.c En additionnant les deux équations de conservation de la matière on obtient :

$$\frac{\partial(n_e + n_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e + n_i \vec{v}_i) = 0$$

Compte-tenu des hypothèses ci-dessus et en divisant par 2, cette équation se simplifie en $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0$

1.d On procède de la même façon pour les équations de conservation de la quantité de mouvement et on met en évidence un certain nombre de simplifications :

- la force électrique est proportionnelle à la densité de charge, elle s'annule donc,
- la somme des forces magnétiques fait apparaître la densité de courant,
- les termes de friction sont identiques mais de signes opposés dans les deux équations, ils s'éliminent,
- les forces de pression s'ajoutent.

Pour additionner les membres de gauche des équations, on peut supposer $\vec{v}_e \approx \vec{v}_i \approx \vec{v}$, puisque aucune différence n'intervient.

$$n_e m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_e) + n_i m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + n_i m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_i) = (n_e m_e + n_i m_i) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right)$$

$$(n_e m_e + n_i m_i) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right) \approx nm \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right)$$

On obtient donc l'équation de conservation de la quantité de mouvement globale donnée dans l'énoncé.

2. Loi d'Ohm généralisée

2.a La quantité de mouvement emportée par un électron lors d'une collision est proportionnelle à la vitesse relative de l'électron par rapport à l'ion. Pour considérer l'échange global par unité de volume, il faut multiplier par le nombre de collisions par unité de volume, νn . On fait l'hypothèse « fluide », tous les électrons ont la vitesse \vec{v}_e , même chose pour les ions, pour aboutir à la forme donnée par l'énoncé. La force obtenue est une force de frottement, opposée à la vitesse relative.

2.b L'équation de conservation des électrons s'écrit

$$n_e m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_e) = n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\vec{\nabla}(p_e) + n_e q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \vec{P}_{ei}$$

$$\text{soit } n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\vec{\nabla}(p_e) - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nu m_e m_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i)$$

On remplace les vitesses électronique et ionique par leurs expressions en fonction de la vitesse fluide et de la densité de courant.

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}(p_e)}{n_e} - e \left(\vec{E} + \left(\vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e e} \right) \times \vec{B} \right) - \nu m_e \left(-\frac{\vec{j}}{n_e e} \right)$$

En réarrangeant les termes on obtient:

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{\vec{\nabla}(p_e)}{n_e} + e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - e \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n_e e} - \nu m_e \frac{\vec{j}}{n_e e} = \vec{0}$$

ce qui est équivalent à

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \frac{m_e}{e} \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{\vec{\nabla}(p_e)}{ne} - \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne} - \nu m_e \frac{\vec{j}}{ne^2} = \vec{0}$$

2.c Le terme de friction correspond à la loi d'Ohm habituelle où le champ électrique est proportionnel à la densité de courant, les autres termes complètent cette loi. Il est donc logique de garder le nom, même si le terme de friction disparaît souvent (voir plus loin).

$$2.d. \text{ La conductivité s'introduit naturellement par } \sigma = \frac{ne^2}{\nu m_e}.$$

Si les échelles spatiales sont grandes, la densité de courant qui est un rotationnel est nécessairement petite

par rapport aux autres grandeurs et $\left| \frac{\vec{j}}{ne} \right| \ll |\vec{v}|$.

Il faut comparer les ordres de grandeur des différents termes entre eux pour éliminer ceux qui sont plus petits que les autres dans l'hypothèse des grandes échelles.

Supposons que T est l'échelle temporelle des phénomènes étudiés et L leur échelle spatiale.

- $\frac{m_e}{e} \frac{dv_e}{dt} \approx \frac{m_e}{e} \frac{v_e}{T}$ comparé à $\vec{v} \times \vec{B} \approx v_e B$: $\frac{m_e}{e} \frac{v_e}{T} / v_e B \approx 1/\omega_{ce} T$; donc si T est grand devant la gyropériode électronique, ce terme est négligeable. C'est forcément le cas puisque la gyropériode des électrons est très petite devant celle des ions. En MHD $T \gg$ le plus grand des temps caractéristiques.

- $\frac{\vec{\nabla}(p_e)}{ne} \approx \frac{p_e}{Lne} \approx \frac{k_B T_e}{Le}$. Il faut exprimer ce rapport en fonction d'une échelle caractéristique des particules. L'échelle qui fait intervenir la température est le rayon de Larmor.

$$\rho_L = \frac{V_{the}}{\omega_{ce}} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}} \frac{m_e}{eB}$$

On compare ce terme en gradient de pression avec $\vec{v} \times \vec{B} \approx v_e B$: $\frac{k_B T_e}{Le} / v_e B \approx \frac{\rho_L^2 \omega_{ce}}{Lv_e}$. On voit que si l'échelle L est grande devant le rayon de Larmor ce rapport est petit.

2.e. On cherche à résoudre $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne}$ pour en tirer la densité de courant.

On peut écrire cette relation : $\vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}_{//} + \vec{j}_{\perp}}{\sigma} + \frac{\vec{j}_{\perp} \times \vec{B}}{ne}$ et la projeter sur les directions parallèle et perpendiculaire.

$$\begin{cases} \vec{E}_{//} = \frac{\vec{j}_{//}}{\sigma} \\ \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}_{\perp}}{\sigma} + \frac{\vec{j}_{\perp} \times \vec{B}}{ne} \end{cases}$$

On en tire facilement : $\vec{j}_{//} = \sigma \vec{E}_{//}$.

On peut écrire la deuxième relation : $\vec{j}_{\perp} = \sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) - \sigma \frac{\vec{j}_{\perp} \times \vec{B}}{ne}$

En reportant cette expression dans elle-même, on peut simplifier :

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\perp} &= \sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma}{ne} \vec{B} \times \left[\sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma}{ne} \vec{B} \times \vec{j}_{\perp} \right] \\ \vec{j}_{\perp} &= \sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2}{ne} \vec{B} \times \vec{E}_{\perp} + \frac{\sigma^2}{ne} \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2}{n^2 e^2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{j}_{\perp}) \\ \vec{j}_{\perp} &= \sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2}{ne} \vec{B} \times \vec{E}_{\perp} + \frac{\sigma^2}{ne} \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2}{n^2 e^2} (\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{j}_{\perp}) - B^2 \vec{j}_{\perp}) \end{aligned}$$

D'où on tire :

$$\vec{j}_{\perp} \left[1 + \frac{\sigma^2 B^2}{n^2 e^2} \right] = \sigma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2}{ne} \vec{B} \times (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Finalement :

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\sigma}{1 + \frac{\sigma^2 B^2}{n^2 e^2}} (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\sigma^2 B}{ne \left[1 + \frac{\sigma^2 B^2}{n^2 e^2} \right]} \frac{\vec{B}}{B} \times (\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B})$$

On identifie $\sigma_{\perp} = \frac{\sigma}{1 + \frac{\sigma^2 B^2}{n^2 e^2}}$ et $\sigma_H = \frac{\sigma^2 B}{ne \left[1 + \frac{\sigma^2 B^2}{n^2 e^2} \right]}$

Connaissant l'expression de $\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu}$, on peut simplifier $\frac{B}{ne} = \frac{eB}{m_e ne} \frac{m_e}{e} = \frac{\omega_{ce}}{\sigma \nu}$ et on trouve :

$$\boxed{\sigma_H = \frac{\sigma}{\frac{\nu}{\omega_{ce}} + \frac{\omega_{ce}}{\nu}} \text{ et } \sigma_{\perp} = \frac{\sigma}{1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\nu^2}}}$$

2.f Application numérique : $\frac{\omega_{ce}}{\nu} = 147$ et $\sigma = 0,094 \text{ Sm}^{-1}$.

On en déduit $\sigma_H = 6.10^{-4} \text{ Sm}^{-1}$ et $\sigma_{\perp} = 4.10^{-6} \text{ Sm}^{-1}$. On constate qu'il y a une forte anisotropie des conductivités. Dans l'ionosphère les courants circulent mieux parallèlement au champ que perpendiculairement. En réalité pour faire une description rigoureuse des conductivités ionosphériques, il faut prendre en compte les collisions ions-électrons, ions-neutres, électrons-neutres, les effets de chaque type étant différents suivant l'altitude. Au final, c'est quand même dans la basse ionosphère (région E) que les conductivités perpendiculaires sont maximum, alors que la conductivité parallèle ne fait que croître avec l'altitude. On observe donc des courants qui circulent essentiellement parallèlement au champ magnétique dans toute l'ionosphère (courants dits de région 1 ou de région 2 suivant qu'ils montent ou descendent). Le circuit se ferme en région E par des courants perpendiculaires.

2.g MHD idéale.

Considérons l'expression du 2.d : $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne}$.

On constate que si v tend vers 0, σ tend vers l'infini et le premier terme du second membre disparaît. Le second terme est de toute façon un terme plus petit que les deux autres :

$$\left| \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne} / \vec{v} \times \vec{B} \right| = \frac{j}{nev} \ll 1.$$

Ce terme est quand même plus grand que les deux qui ont été négligés à la question 2.d. Le prendre en compte permet de prendre en compte des fréquences petites mais non négligeables devant la gyrofréquence des ions. On parle alors de MHD-Hall.

2.h. Dans ce cas c'est le second terme qui disparaît :

$$\left| \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{ne} / \vec{j} / \sigma \right| = \frac{B\sigma}{ne} = \frac{\omega_{ce}}{\nu} \ll 1 \text{ et donc } \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

3. Equation d'évolution du champ en MHD résistive

3.a Il suffit de remplacer le champ électrique par la loi d'Ohm généralisée dans l'équation de Maxwell

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{B} + \frac{\vec{j}}{\sigma} \right).$$

En remplaçant la densité de courant par son expression dans l'équation de

$$\text{Maxwell-Ampère : } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

On obtient l'équation de l'énoncé en développant le double rotationnel, ce qui fait apparaître un terme en $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

3.b Le premier terme est le champ électromoteur, générateur de champ, le second est un terme diffusif, dissipateur de champ.

3.c Si on compare les ordres de grandeur des deux termes de droite de l'équation on met en évidence le nombre de Reynolds magnétique :

$$\left| \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right| / \left| \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} \right| \approx \frac{vB}{L} \mu_0 \sigma \frac{L^2}{B} \approx vL\mu_0 \sigma = R_m$$

Le nombre de Reynolds magnétique est donc le rapport entre le terme électromoteur et le terme diffusif.

3.d Ordres de grandeur :

	dimension	vitesse	conductivité	R_m
mercure	1 m	1 ms ⁻¹	10 ⁶ Sm ⁻¹	1
Jonas	2 m	1 ms ⁻¹	10 ⁵ Sm ⁻¹	2.10 ⁻²
couronne	10 ⁸ m	100.10 ³ ms ⁻¹	2.10 ⁶ Sm ⁻¹	2.10 ¹³

Les ordres de grandeurs des nombres de Reynolds magnétiques sont complètement différents dans les deux cas, il est donc impossible de reproduire en laboratoire des phénomènes qui pourraient modéliser le plasma de la couronne solaire.

3.e Dans le cas où la vitesse du plasma est nulle, l'équation se simplifie et se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B}. \text{ On reporte l'expression du champ donnée par l'énoncé et on obtient}$$

$$\frac{d\vec{B}_0}{dt} \cos kx = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{B}_0 k^2 \cos kx.$$

La variation temporelle reste seule, en projection le long de la direction du champ :

$$\frac{dB_0}{B_0} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} k^2 dt = -\frac{dt}{\tau}, \text{ soit } B_0(t) = b e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } b \text{ est une constante d'intégration, l'amplitude du champ à l'origine.}$$

Le champ a donc une amplitude qui décroît en fonction du temps jusqu'à disparition. C'est bien la caractéristique d'une équation de diffusion. Si on n'a pas de source de champ (terme électromoteur), le champ disparaît naturellement dans un milieu résistif. Cette disparition est d'autant plus rapide que les échelles spatiales sont petites ($\tau \propto 1/k^2$).

4. Onde d'Alfven

On ne propose pas ici la résolution complète du système MHD mais seulement de trouver l'un des modes solutions, le mode d'Alfven. Il y a deux autres solutions, les modes magnétosoniques (ou compressionnels) lent et rapide.

4.a Les équations MHD en plasma froid s'écrivent:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0, \quad nm \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + nm(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) = \vec{j} \times \vec{B} \text{ et } \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$$

En linéarisant on obtient:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_1) = 0, \quad n_0 m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 \text{ et } \vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = \vec{0}$$

Il faut compléter par les équations des champs : $\vec{j}_1 = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}_1}{\mu_0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$ et $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}_1$.

4.b On remplace maintenant les dérivées temporelles par $-i\omega$ et les dérivées spatiales par $i\vec{k}$.

Les trois premières équations deviennent:

$$-i\omega n_1 + n_0 i\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad -i\omega n_0 m \vec{v}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 \text{ et } \vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = \vec{0}$$

Les trois autres : $\vec{j}_1 = \frac{i\vec{k} \times \vec{B}_1}{\mu_0}$, $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$ et $-i\omega \vec{B}_1 = -i\vec{k} \times \vec{E}_1$

4.c En faisant l'hypothèse $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$ on particularise la solution qu'on recherche. On constate immédiatement que dans ce cas la perturbation de densité associée à l'onde est nulle. Pour poursuivre la résolution il faut éliminer le champ électrique puis la densité de courant.

$$\omega \vec{B}_1 = \vec{k} \times \vec{E}_1 = -\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = -(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1$$

$$\vec{j}_1 = \frac{i\vec{k}}{\mu_0} \times \vec{B}_1 = -\frac{i\vec{k}}{\mu_0} \times \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega} \vec{v}_1 = -\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\mu_0 \omega} \vec{k} \times \vec{v}_1$$

Enfinement : $-i\omega n_0 m \vec{v}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 = -\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{v}_1) \times \vec{B}_0$

Qui se met sous la forme : $\vec{v}_1 \left(1 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu_0 \omega^2 n_0 m} \right) = 0$

La parenthèse doit être nulle pour qu'on ait une solution non triviale et on obtient la relation de dispersion $\omega = kV_A \cos \theta$ où θ est l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique.

4.d Le rapport entre courant de déplacement et courant porté par les charges s'écrit $\epsilon_0 \omega E_1 / j$ dont l'ordre de grandeur est $(V_A \cos \theta)^2 / c^2 \approx V_A^2 / c^2$.

On trouve que ce rapport vaut $5,3 \cdot 10^{-4}$ dans le cas de la couronne et $1,3 \cdot 10^{-7}$ dans le cas du vent solaire. Dès lors que le milieu est assez magnétisé, le courant de déplacement est négligeable.

4.e. Cette propriété a été établie plus haut : $\vec{B}_1 = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega} \vec{v}_1$. En remplaçant la relation de dispersion on obtient $\vec{B}_1 = \pm \sqrt{\mu_0 n_0 m} \vec{v}_1$ suivant la valeur de l'angle entre \vec{k} et le champ magnétique.

5. Analyse des fluctuations dans le vent solaire

5.a. La période des fluctuations est de l'ordre de l'heure d'une heure soit $\omega = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Il faut comparer à la gyropulsation des protons qui vaut $0,48 \text{ s}^{-1}$ (le champ moyen vaut 5 nT).

5.b On constate sur la figure que les courbes V_R et B_R sont fortement corrélées, les détails des courbes étant très semblables. De plus les courbes sont en phase. On a donc une relation du type de celle établie au

4.e. Pour vérifier quantitativement on calcule $K = \sqrt{\mu_0 n_0 m_p} = \sqrt{4\pi 10^{-7} 5 \cdot 10^6 1836 \cdot 910^{-31}} = 1,018 \cdot 10^{-13}$

Sur les courbes on mesure des hauteurs de fluctuations à la même heure sur les deux signaux:

A 8 heures, $V_R = 29 \text{ kms}^{-1}$, $B_R = 4 \text{ nT}$

Soit : $\frac{B_1}{v_1} = 1,4 \cdot 10^{-13}$

On a donc des ordres de grandeurs tout à fait compatibles et on peut en conclure qu'on observe bien des ondes d'Alfvén.

5.c. Si des ions hélium sont présents dans le plasma, ils vont alourdir le plasma et augmenter K donc se rapprocher de la valeur mesurée expérimentalement.

Si on a une fraction α d'ions hélium, on devra remplacer $n_0 m_p$ par $n_0 m_p (1 - \alpha) + n_0 4 m_p \alpha$, soit $n_0 m_p + n_0 3 m_p \alpha$.

On peut déduire du rapport entre les deux valeurs trouvées une estimation de α , on trouve 0,3. Cette valeur est plus élevée que dans la réalité.

Pour faire une estimation correcte de K , il faut tenir compte non seulement de la présence d'hélium mais aussi de l'anisotropie de pression qui existe dans le vent solaire (mais n'était pas mesurée par Mariner).

La formule complète serait donc $K = \sqrt{\mu_0 n_0 m_p (1 + 3\alpha)} \left(1 - \frac{p_{//} - p_{\perp}}{B^2 / 2\mu_0}\right)^{-1/2}$, impossible à démontrer dans les conditions du problème.

5.d. Les fluctuations observées sont loin d'être monochromatiques mais dans la mesure où la relation sur les polarisations est indépendante de la fréquence, on peut superposer autant de modes monochromatiques qu'on veut, la relation 4.e est toujours vérifiée.

Un œil averti remarquera toutefois qu'une des hypothèses du calcul de l'onde d'Alfvén n'est pas vérifiée: celle des petites perturbations, on est ici en présence de fluctuations qui sont de l'ordre de grandeur du champ principal et donc le développement limité n'est pas justifié. En fait le résultat est juste quand même parce que l'onde d'Alfvén est solution du système d'équations de la MHD non linéaire, c'est une solution exacte.

5.e La relation entre les polarisations est définie au signe près. $\vec{B}_1 = \pm K \vec{v}_1$.

En pratique on trouve plus précisément $\vec{B}_1 = -\vec{v}_1 \frac{\vec{k} \cdot \vec{B}_0}{\omega}$, ce qui signifie que quand l'onde se propage dans le sens du champ on doit avoir opposition de phase entre les fluctuations de vitesse et de champ. Dans le cas de la figure on a des signaux en phase ce qui signifie que le vecteur d'onde est à plus de 90° du champ. Par ailleurs le champ a sa composante radiale (R) négative donc dirigée vers le Soleil, ce qui signifie qu'inversement le vecteur d'onde est dirigé suivant R et donc sortant du Soleil. L'énoncé explique que ce résultat est général on peut donc en conclure que les ondes d'Alfven se propagent depuis le Soleil vers l'extérieur, leur source est donc très probablement à la surface du Soleil.

6. Force magnétique volumique

a. On remplace \vec{j} par son expression dans $\vec{j} \times \vec{B}$, ce qui donne: $\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$. Cette

expression peut se développer grâce à la formule

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

qui donne:

$$\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{B}) = 2(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + 2\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

On en déduit $\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left((\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{B}) \right)$

b. On écrit $\vec{B} = B\vec{t}$ et on développe

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = B(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})(B\vec{t}) = B(B(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{t} + [\vec{t} \cdot \vec{\nabla}(B)]\vec{t}) = B^2(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{t} + \left[\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \right] \vec{t}$$

Avec $(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R_c}$ on obtient le résultat de l'énoncé.

c. Finalement : $\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \left[\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \vec{t} + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} \vec{n}$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$nm \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + nm(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p) + \vec{j} \times \vec{B} = -\vec{\nabla}(p) - \left(\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \left[\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \vec{t} \right) + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} \vec{n}$$

Le terme en $\frac{B^2}{2\mu_0}$ est un terme de pression magnétique qui intervient dans l'équation par son gradient, comme le terme de pression cinétique. En fait seul intervient le gradient normal à la ligne de champ, la partie tangentielle étant soustraite.

L'autre terme est purement perpendiculaire à la ligne de champ, il agit comme une force de rappel sur la ligne de champ. Plus elle est courbe plus le rappel est fort.

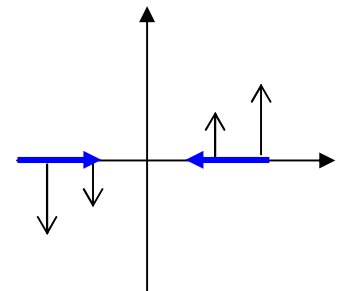
Au final la force qui s'exerce sur la ligne de champ est bien perpendiculaire à la ligne comme $\vec{j} \times \vec{B}$.

d. $\vec{B} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x/l \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

L'équation des lignes de champ s'obtient en écrivant $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}$,

donc ici $x = \text{cste}$.

Les lignes de champ sont rectilignes et $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \vec{0}$.

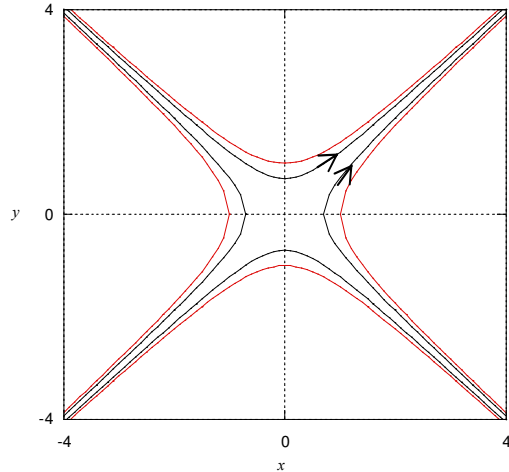


La seule force qui intervient est celle de pression : $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{x^2}{l^2}$. Donc $-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{x}{l^2} \vec{e}_x$. La force est perpendiculaire aux lignes de champ et elle tend à les rapprocher du point O (tracée en bleu).

e.

$$\vec{B} = B_0 \begin{cases} y/l \\ x/l \\ 0 \end{cases}. \text{ On vérifie que } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

L'équation des lignes de champ s'écrit $x dx = y dy$. Ce qui s'intègre en $y^2 = x^2 + \alpha$.



$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{x^2 + y^2}{l^2}, \text{ donc } -\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{x}{l^2} \vec{e}_x - \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{y}{l^2} \vec{e}_y$$

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \left(B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (\vec{B}) = B_x B_0 \frac{\vec{e}_y}{l} + B_y B_0 \frac{\vec{e}_x}{l} = B_0^2 \left(\frac{y}{l} \frac{\vec{e}_y}{l} + \frac{x}{l} \frac{\vec{e}_x}{l} \right)$$

La force totale est donc nulle dans cette géométrie. La force qui tend à redresser les lignes de champ est directement opposée à la force due au gradient de pression magnétique.

f. Le point en X peut être en équilibre sans gradient de pression, alors que le champ qui se retourne comme au d. ne peut être en équilibre que si un gradient de pression cinétique compense le gradient de pression magnétique.

7. Tache solaire

7.a On écrit

$$nm \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + nm(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) = -\vec{\nabla}(p) - \left(\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \left[\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) \right] \vec{t} \right) + \frac{B^2}{R_c} \vec{n}$$

En régime stationnaire, en l'absence de convection (vitesse nulle) et avec un champ purement vertical, l'équation devient:

$$-\vec{\nabla}_\perp(p) - \vec{\nabla}_\perp\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0$$

On a donc conservation de la pression totale, magnétique plus cinétique.

7.b On écrit la conservation entre l'intérieur (indice T) et l'extérieur (indice P) de la tache:

$$p_T + \frac{B_T^2}{2\mu_0} = p_P + \frac{B_P^2}{2\mu_0}, \text{ ce qui revient, en négligeant le pression cinétique dans la tache et le champ en}$$

$$\text{dehors, à } \frac{B_T^2}{2\mu_0} = p_P = nkT$$

7.c On trouve un champ de 0,4 T dans la tache. Si avait gardé le terme de pression cinétique aussi dans la tache, on aurait trouvé 0,2 T. Le seul résultat significatif est l'ordre de grandeur.

8. La MHD idéale et ses limites

8.a Comme $\vec{C}(t) = \delta\vec{L} \times \vec{B} = \vec{0}$ et qu'on veut montrer que c'est toujours vrai à dt plus tard, il suffit de montrer que la dérivée par rapport au temps est nulle.

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\delta\vec{L}}{dt} \times \vec{B} + \delta\vec{L} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\delta\vec{L}(t+dt) = \delta\vec{L}(t) - \vec{v}(\vec{x})dt + \vec{v}(\vec{x} + \delta\vec{L})dt = \delta\vec{L}(t) + (\delta\vec{L} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}dt$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}. \text{ C'est là qu'intervient explicitement l'hypothèse MHD idéale.}$$

On développe le premier terme en utilisant la formule donnée par l'énoncé.

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = -\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\text{On reporte dans } \frac{d\vec{C}}{dt} = (\delta\vec{L} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \times \vec{B} + \delta\vec{L} \times (-\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}).$$

A l'instant initial on peut écrire $\delta\vec{L} = \delta L \vec{u}$ et $\vec{B} = B \vec{u}$ et donc

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \delta L B ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \times \vec{u} + \vec{u} \times (-\vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})) = \delta L B (((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}) \times \vec{u} - \vec{u} \times \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \times ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}))$$

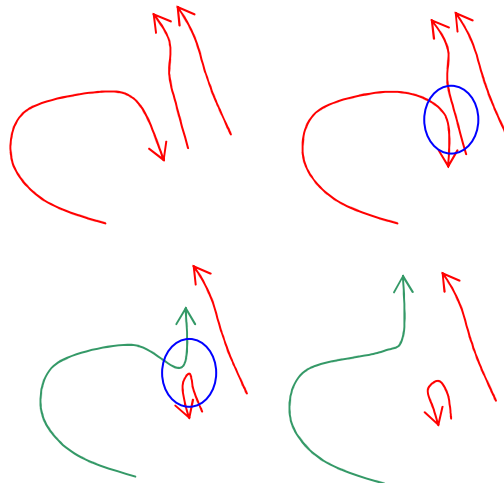
$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \delta L B ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \times \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{0}$$

On en déduit donc que le vecteur champ magnétique et le vecteur qui lie les deux éléments de fluides restent parallèles.

8.b

En bleu la zone où la reconnexion est possible.

En vert la ligne de champ qui s'ouvre et va laisser partir la matière initialement piégée dans la boucle fermée.



La reconnexion peut être déclenchée par la présence d'une région de plasma collisionnel ou par le fait que la croissance de la boucle comprime les lignes de champ anti-parallèles et crée un gradient de champ fort sur des petites échelles.

9. Champ magnétique dans le vent solaire.

En MHD idéale et en régime stationnaire l'équation d'évolution du champ magnétique s'écrit simplement:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

9.a En projetant en coordonnées sphériques et en tenant compte des hypothèses, on obtient:

$$\vec{\nabla} \times (v_\phi B_r - v_r B_\phi) \vec{e}_\theta = \vec{0}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial r} r(v_\phi B_r - v_r B_\phi) = 0$$

En intégrant on a $r(v_\varphi B_r - v_r B_\varphi) = \text{constante}$

9.b A la surface du Soleil $r = R$, et la vitesse est azimutale : $Rv_{\varphi 0} B_0 = \text{constante}$.

Loin du Soleil: $Rv_{\varphi 0} B_0 = -rv_r B_\varphi$

On a donc à grande distance $B_\varphi(r) = -\frac{Rv_{\varphi 0} B_0}{rv_r} = -B_0 \frac{R^2 \Omega}{v_r r}$.

9.c Il suffit d'utiliser la divergence pour trouver la composante r .

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} = 0 \text{ qui s'intègre en } B_r = B_0 \frac{R^2}{r^2}$$

$$9.d \frac{B_r}{B_\varphi} = -\frac{R^2}{r^2} \frac{v_r}{\Omega R^2} r = -\frac{v_r}{\Omega r}$$

On trouve l'équation des lignes de champ en calculant $\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{B_r}{B_\varphi} = -\frac{v_r}{\Omega r}$, qui s'intègre en

$r - R = -\frac{v_r}{\Omega}(\varphi - \varphi_0)$. C'est l'équation d'une spirale.

9.e L'angle entre le champ et la direction radiale est donné par : $\tan \psi = \frac{B_\varphi}{B_r} = \frac{\Omega r}{v_r}$, soit à l'orbite de la Terre $\tan \psi = 1,08$ et $\psi = 47^\circ$. ($\Omega = 3.10^{-6} \text{ s}^{-1}$).

$$9.f \text{ Le module du champ vaut } B = B_0 R^2 \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{\Omega^2}{r^2 v_r^2}}$$

$$B = B_0 R^2 \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{\Omega^2}{r^2 v_r^2}} = B_0 3,3.10^{-5} = 5.10^{-9} \text{ T, soit } B_0 = 1,5.10^{-4} \text{ T.}$$

On trouve donc un champ 1000 fois plus petit à la surface du Soleil que dans une tache. Il était donc légitime de négliger le champ sur la photosphère dans le calcul du champ de la tache.