

Nanomagnétisme et sonde à effet Hall

Corrigé

1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1.1 Lagrangien d'une particule dans un champ électromagnétique

1. Impulsion : $p_x = \frac{1}{2}m \times 2v_x + qA_x$, de même pour les deux autres composantes. Finalement :
 $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$.
Énergie : $\mathcal{E} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi$.

2. (a) L'énergie se met bien sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{el}$ où $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique et $\mathcal{E}_{el} = q\phi$ l'énergie potentielle de la particule dans le potentiel ϕ .

(b) $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$ d'où : $\mathcal{E}_c = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}$.

1.2 Force de Lorentz et transformation des champs

1. $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

2. Dans le référentiel (K), la force de Lorentz s'écrit : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Dans le référentiel (K'), elle s'écrit : $\vec{f}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$. Or en mécanique classique, $\vec{f} = \vec{f}'$. De plus, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$. Donc $\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v} \wedge \vec{B}$.

On en déduit :

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

3. Pour que $\vec{E}' = \vec{0}$, il faut que $\vec{v}_e \wedge \vec{B} = -\vec{E}$. Il faut donc que \vec{E} soit orthogonal à \vec{B} et que $\|\vec{E}\| \ll c\|\vec{B}\|$ pour que v existe et que l'on reste dans le cadre de la mécanique classique.

Alors, grâce à la formule du double produit vectoriel, on trouve : $\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$.

1.3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. La force magnétique ne travaille pas donc l'énergie cinétique de la particule se conserve : le module du vecteur vitesse reste constant au cours du mouvement.

D'autre part, le principe fondamental de la dynamique projeté sur la normale au mouvement s'écrit : $m \frac{v^2}{\rho} = |q|vB$ où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire. On en déduit

que celui-ci est constant : la trajectoire est un cercle de rayon $\rho = \frac{mv}{|q|B}$, décrit à la vitesse

angulaire $\omega_c = \frac{v}{\rho} = \frac{|q|B}{m}$. Comme $q < 0$, la trajectoire est décrite dans le sens positif (par rapport à Oz).

Pour avoir les expressions de $x(t)$ et de $y(t)$, on projette le principe fondamental de la dynamique sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qB_0 v_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qB_0 v_x \end{cases}$$

Pour intégrer ces équations, on pose $u = v_x + iv_y$. L'équation vérifiée par $u(t)$ est alors : $m \frac{du}{dt} = -iqB_0 u$, soit : $\frac{du}{dt} - i\omega_c u = 0$. Compte tenu des conditions initiales, cette équation s'intègre en : $u(t) = iv_0 \exp(i\omega_c t)$. On en déduit :

$$\begin{cases} v_x(t) = -v_0 \sin(\omega_c t) \\ v_y(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (1 + \cos(\omega_c t)) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

C'est bien l'équation du cercle déterminé plus haut.

2. Dans le référentiel (K_d) en translation à la vitesse $\vec{v}_d = \frac{E_0}{B_0} \vec{e}_x$, le champ électrique est nul (d'après la question précédente).

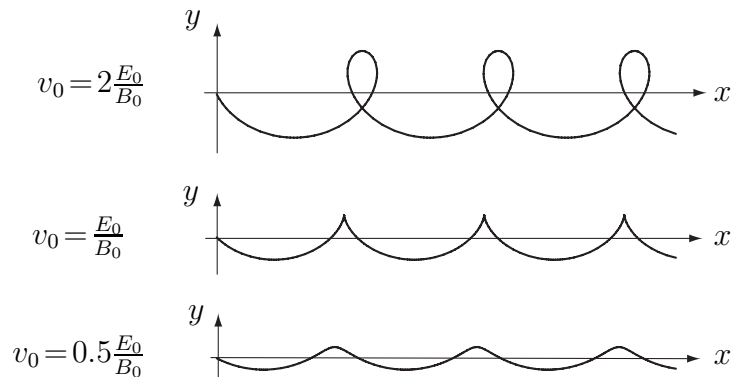
La projection de la trajectoire dans le plan (Oxy), dans le référentiel (K_d) a donc pour équations :

$$\begin{cases} x_d(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (1 + \cos(\omega_c t)) \\ y_d(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

et dans le référentiel (K) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (1 + \cos(\omega_c t)) + \frac{E_0}{B_0} t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

Les trajectoires demandées ont l'allure suivante (les trois courbes sont tracées pour les mêmes valeurs de v_0 et ω_c , pour une particule de charge positive, le tracé étant orthonormé) :



3. Le mouvement des charges est celui qui vient d'être étudié. Le vecteur densité de courant est $\vec{j}_s(t) = -N_s e \vec{v}(t)$. En moyenne, les termes en cosinus et sinus sont nulles, il reste : $\vec{j}_s = -N_s e \frac{E_0}{B_0} \vec{e}_x$.

La grandeur $R_H = \frac{E_0}{\|\vec{j}_s\|}$ s'exprime en $\frac{\text{V.m}^{-1}}{\text{A.m}^{-1}}$ donc en $\frac{\text{V}}{\text{A}}$, elle est bien homogène à une résistance. On obtient : $R_H = \frac{B_0}{N_s e}$.

2 Sonde à effet Hall et mesure

2.1 Bandes d'énergie

1. $\Delta\Psi = f''(z)\phi(x, y) + f(z)\Delta\phi(x, y)$. L'équation de Schrödinger s'écrit donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(z)\phi(x, y) - \frac{\hbar^2}{2m^*} f(z)\Delta\phi(x, y) + V(z)f(z)\phi(x, y) = \mathcal{E}f(z)\phi(x, y)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{f''(z)}{f(z)} + V(z)}_{\text{fonction de } z \text{ seul}} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\Delta\phi(x, y)}{\phi(x, y)}}_{\text{fonction de } (x, y) \text{ seuls}} = \mathcal{E}$$

La fonction de z et celle de (x, y) sont donc constantes (variables indépendantes). Il vient :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m^*} f''(z) + V(z)f(z) = \mathcal{E}_z f(z) \\ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta\phi(x, y) = \mathcal{E}_{x,y} \phi(x, y) \end{cases}$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_z + \mathcal{E}_{x,y}$.

2. Mouvement dans le plan

- (a) Avec l'expression donnée, $\Delta\phi = -(k_x^2 + k_y^2)\phi$, donc : $\mathcal{E}_{x,y} = \frac{\hbar^2}{2m^*}(k_x^2 + k_y^2)$.

- (b) $\frac{m^*}{\pi\hbar^2}$ s'exprime en : $\frac{\text{kg}}{(\text{J.s})^2} = \frac{1}{\text{J}} \times \frac{\text{kg}}{\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.\text{s}^2} = \text{J}^{-1}.\text{m}^{-2}$: c'est bien un nombre par unité d'énergie et de surface.

AN : $g_{x,y}(\mathcal{E}) = 2,9 \cdot 10^{14}$ états par meV et par m^2 .

3. Mouvement selon Oz

- (a) $\mathcal{E}_i = \frac{p_i^2}{2m^*} + V(z) \Leftrightarrow p_i(z) = \sqrt{2m^*(\mathcal{E}_i - V(z))}$

La condition de quantification donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{z_i} \sqrt{2m^*(\mathcal{E}_i - eFz)}^{1/2} dz &= \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi\hbar \\ \Leftrightarrow \sqrt{2m^*} \left(-\frac{1}{eF}\right) \frac{2}{3} [(\mathcal{E}_i - eFz)^{3/2}]_0^{z_i} &= \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi\hbar \\ \Leftrightarrow \sqrt{2m^*} \frac{2}{3eF} \mathcal{E}_i^{3/2} &= \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi\hbar \end{aligned}$$

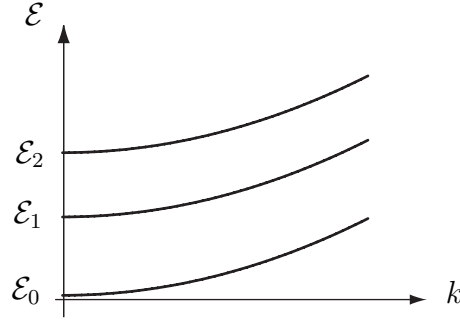
puisque $\mathcal{E}_i = eFz_i$. Finalement :

$$\mathcal{E}_i = \left(\frac{3eF}{2\sqrt{2m^*}} \left(i + \frac{3}{4}\right) \pi\hbar\right)^{2/3}$$

(b) AN : $\mathcal{E}_0 = 66 \text{ meV}$ et $\mathcal{E}_1 = 116 \text{ meV}$.

4. Cas général

(a) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \frac{\hbar^2}{2m^*}k^2$. C'est bien de la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \Lambda k^2$ avec $\Lambda = \frac{\hbar^2}{2m^*}$.



(b) On veut que $g_{x,y}(\mathcal{E}) \times (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) \geq N_S$, ce qui donne :

$$N_{S\max} = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$$

(c) On a $N_S < N_{S\max}$ donc le dernier état occupé est l'état d'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{\pi\hbar^2 N_S}{m^*}$.
Il faut que la température vérifie : $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E} > k_B T$, soit $T < 580 \text{ K}$ (environ).

2.2 Effet Hall

1. Le principe fondamental appliqué à un électron s'écrit :

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) - \frac{m^*}{\tau} \vec{v}$$

En régime permanent, cette équation devient : $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) - \frac{m^*}{\tau} \vec{v} = \vec{0}$. En multipliant cette équation par $-N_S e$, on obtient l'équation reliant \vec{j}_S à \vec{E} :

$$\vec{j}_S + e\vec{j}_S \wedge \vec{B}_0 = \frac{N_S e^2 \tau}{m^*} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E}$$

σ_0 est la conductivité du gaz bidimensionnelle en l'absence de champ magnétique. En projection sur les axes Ox et Oy , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} j_{Sx} + \omega_c \tau j_{Sy} = \sigma_0 E_x \\ -\omega_c \tau j_{Sx} + j_{Sy} = \sigma_0 E_y \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} j_{Sx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (E_x - \omega_c \tau E_y) \\ j_{Sy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} (\omega_c \tau E_x + E_y) \end{cases}$$

Les composantes du tenseur conductivité sont donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \\ \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \end{cases}$$

2. En régime permanent, le courant est selon Ox donc $j_{Sy} = 0$, soit $E_y = -\omega_c \tau E_x$. On en déduit : $j_{Sx} = \frac{-\sigma_0}{\omega_c \tau} E_y$.
 3. Alors : $V_H = \int_{L/2}^{-L/2} -E_y dy = E_y L$ et $I = j_{Sx} L$. Tous calculs faits, on obtient : $R_H = \frac{B_0}{N_S e}$.
 4. $s = \frac{\delta V_H}{\delta B} = \frac{I}{N_S e} = \frac{j_S L}{N_S e}$.
- AN : pour $L = 100 \text{ nm}$, $s = 16 \text{ mV} \cdot \text{T}^{-1}$, $B_{\min} = 64 \text{ nT}$ et pour $L = 5 \text{ } \mu\text{m}$, $s = 0,78 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$ et $B_{\min} = 1,3 \text{ nT}$.

3 Bruit de mesure

3.1 Signal aléatoire et densité spectrale de bruit

1. $C(0) = \langle v^2(t) \rangle$. D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \widehat{S}(0) = C(0)$. $S(f)$ est la densité spectrale, c'est une énergie par unité de fréquence.
2. Le changement de variable $t' = t - \tau$ dans la définition de $C(\tau)$ permet de montrer que $C(\tau) = C(-\tau)$.
- 3.

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \exp(-2i\pi ft) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 C(t) \exp(-2i\pi ft) dt + \int_0^{+\infty} C(t) \exp(-2i\pi ft) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} C(t) (\exp(2i\pi ft) + \exp(-2i\pi ft)) dt
 \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $t' = -t$ dans la première intégrale et en utilisant la parité de $C(t)$. On a donc :

$$S(f) = 2 \int_0^{+\infty} C(t) \cos(2\pi ft) dt$$

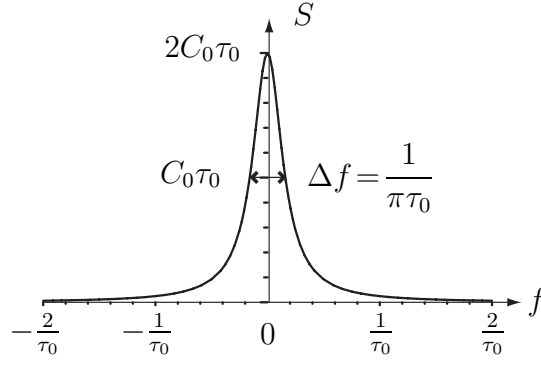
$S(f)$ est bien une fonction réelle.

4. Applications

(a) Pour un bruit blanc : $S(f) = \Gamma \widehat{\delta}(f) = \Gamma$. La densité spectrale est indépendante de la fréquence.

(b) Pour un bruit lorentzien : $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_0 \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right) \exp(-2i\pi f\tau) d\tau$. On fait le changement de variable $u = t/\tau$.

Il vient : $S(f) = C_0 \tau_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|u|) \exp(-2i\pi(f\tau_0)u) dt = C_0 \tau_0 TF(\exp(-|u|))(\tau_0 f)$,
c'est-à-dire : $S(f) = \frac{2C_0 \tau_0}{1 + (2\pi f \tau_0)^2}$. La courbe représentative de $S(f)$ est :



La courbe est d'autant plus large que τ_0 est petit.

3.2 Fluctuations de la vitesse dans les conducteurs

1. $m^* \frac{dv}{dt} = -\frac{m^*}{\tau_0} v(t) + m^* \eta(t) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{\tau_0} = \eta(t)$.
2. La solution de l'équation homogène associée est $v_H(t) = A \exp(-t/\tau_0)$. La solution générale est donc de la forme : $v(t) = A(t) \exp(-t/\tau_0)$ (méthode de variation de la constante) où $A(t)$ vérifie l'équation : $A'(t) = \eta(t) \exp(t/\tau_0)$ d'où :

$$A(t) = \int_0^t \eta(u) \exp\left(\frac{u}{\tau_0}\right) du + A_1$$

où A_1 est une constante. En utilisant la condition initiale $v(0) = v_0$, on en déduit :

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \eta(u) du$$

Dès que t atteint la valeur de quelques fois τ_0 , le régime transitoire $v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)$ devient négligeable devant l'autre terme : le système perd rapidement la mémoire de ses états antérieurs.

3. $v(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \eta(u) du$ donc :

$$\langle v(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \eta(u) du \right\rangle = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \langle \eta(u) \rangle du = 0$$

puisque la moyenne est prise ici sur l'ensemble des électrons.

De même :

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= \left\langle \int_0^t \int_0^t \eta(u) \eta(u') \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t-u'}{\tau_0}\right) du du' \right\rangle \\ &= \int_0^t \int_0^t \langle \eta(u) \eta(u') \rangle \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t-u'}{\tau_0}\right) du du' \end{aligned}$$

On pose $u' = u + \tau$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\langle v^2(t) \rangle &= \int_0^t \int_{-u}^{t-u} \langle \eta(u)\eta(u+\tau) \rangle \exp\left(-\frac{2(t-u)}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) du d\tau \\
&= \int_0^t \int_{-u}^{t-u} \Gamma \delta(\tau) \exp\left(-\frac{2(t-u)}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) du d\tau \\
&= \int_0^t \Gamma \exp\left(-\frac{2(t-u)}{\tau_0}\right) du \\
&= \Gamma \frac{\tau_0}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau_0}\right)\right) \\
&\simeq \Gamma \frac{\tau_0}{2} \text{ pour } t \gg \tau_0
\end{aligned}$$

4. Le théorème d'équipartition de l'énergie donne : $\langle v^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{m^*}$, soit ici : $\Gamma \frac{\tau_0}{2} = \frac{k_B T}{m^*}$ ou encore : $\frac{\Gamma}{\lambda} = \frac{2k_B T}{m^* \tau_0}$.

5. On travaille dans un premier temps pour $\tau > 0$.

$$\begin{aligned}
\langle v(t)v(t+\tau) \rangle &= \left\langle \int_0^t \int_0^{t+\tau} \eta(u)\eta(u') \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t+\tau-u'}{\tau_0}\right) du du' \right\rangle \\
&= \int_0^t \int_0^{t+\tau} \langle \eta(u)\eta(u') \rangle \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t+\tau-u'}{\tau_0}\right) du du'
\end{aligned}$$

On pose $u' = v + \tau$. Il vient :

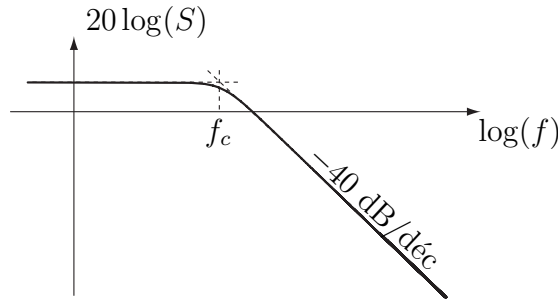
$$\begin{aligned}
\langle v(t)v(t+\tau) \rangle &= \int_0^t \int_{-\tau}^t \langle \eta(u)\eta(v+\tau) \rangle \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t-v}{\tau_0}\right) du dv \\
&= \int_0^t \int_{-\tau}^t \Gamma \delta(v+\tau-u) \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t-v}{\tau_0}\right) du dv \\
&= \int_0^t \Gamma \exp\left(-\frac{t-u}{\tau_0}\right) \exp\left(-\frac{t-u+\tau}{\tau_0}\right) du \\
&= \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \int_0^t \Gamma \exp\left(-\frac{2(t-u)}{\tau_0}\right) du \\
&= \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \langle v^2(t) \rangle \\
&= \frac{k_B T}{m^*} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_0}\right) \text{ pour } t \gg \tau_0
\end{aligned}$$

La fonction de corrélation étant une fonction paire, cette expression se généralise à toute valeur de τ selon la formule :

$$\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = \frac{k_B T}{m^*} \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right)$$

6. D'après les résultats précédents : $S(f) = \widehat{C}(f) = \frac{k_B T \tau_0}{m^*} \frac{2}{1 + (2\pi f \tau_0)^2}$.

La courbe demandée est :



La fréquence de coupure à -3 dB est : $f_c = \frac{1}{2\pi\tau_0}$. Pour $f \ll f_c$, $S(f) = \frac{2k_B T \tau_0}{m^*}$.

Si $\tau_0 < 10$ ns, $f_c > 16$ MHz, ce qui est très grand par rapport aux fréquences mises en jeu dans les expériences.

3.3 Bruit de Johnson Nyquist dans une résistance

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron en régime permanent donne : $0 = -\frac{m^*}{\tau_0}v(t) + m^*\eta(t) - eE$. D'où $\langle v \rangle = -\frac{e\tau_0}{m^*}E$, puis $j_S = -N_s e \langle v \rangle = \frac{N_s e^2 \tau_0}{m^*} E = \sigma_S E$ avec $\sigma_S = \frac{N_s e^2 \tau_0}{m^*}$.

2. Alors : $R = \frac{U}{I}$ avec $U = EL_x$ et $I = j_S L_y = \sigma_S E L_y$. Finalement : $R = \frac{L_x}{\sigma_S L_y} = \frac{m^*}{N_s e^2 \tau_0} \frac{L_x}{L_y}$.

3. Il y a $N = N_s L_x L_y$ électrons dans le gaz bidimensionnel. D'autre part : $I(t) = |j_S| L_y$ avec $|j_S| = \frac{Ne}{L_x L_y} \times \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i$. Donc : $I(t) = \frac{e}{L_x} \sum_{i=0}^N v_i$.

On en déduit : $V(t) = RI(t) = \frac{Re}{L_x} \sum_{i=0}^N v_i$.

4. $V(t)$ se met donc sous la forme $V(t) = \sum_i V_i(t)$ avec $V_i(t) = \frac{Re}{L_x} v_i$. On en déduit :

$$S_{V_i}(f) = \left(\frac{Re}{L_x} \right)^2 S(f).$$

5. Alors : $S_V(f) = N \left(\frac{Re}{L_x} \right)^2 \frac{2k_B T \tau_0}{m^*} = N_s L_x L_y \times \frac{eR}{L_x} \times \frac{e}{L_x} \times \frac{m^*}{N_s e^2 \tau_0} \times \frac{L_x}{L_y} \times \frac{2k_B T \tau_0}{m^*}$, ce qui se simplifie en : $S_V(f) = 2Rk_B T$.

4 Champ de moments magnétiques

4.1 Moments magnétiques et moments cinétiques. Facteur de Landé.

1. $\vec{L}_O = \sum_n \vec{OM}_n \wedge m \vec{v}_n = \frac{2m}{q} \vec{\mathcal{M}}_O$. On a bien $\vec{\mathcal{M}}_O = \gamma_c \vec{L}_O$ avec $\gamma_c = \frac{q}{2m}$.

2. (a) $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{J}$. Or $J_z = m\hbar$ donc $\mathcal{M}_z = g\mu_B m$ où $m = -J, -J+1, \dots, J-1, J$.

(b) **Le spin de l'électron**

$L = 0$, $J = S = 1/2$ donc $g = 2$ et $\mathcal{M}_z = 2 \times \mu_B \times \pm \frac{1}{2} = \pm \mu_B$.

(c) **La molécule Fe₈**

De même $\mathcal{M}_z = -2\mu_B m$ avec $m = -10, -9, \dots, 9, 10$, donc :

$\mathcal{M}_z = -20\mu_B, -18\mu_B, \dots, 18\mu_B, 20\mu_B$.

4.2 Champ créé par la matière aimantée

1. Champ sur l'axe d'un dipôle isolé

- (a) Sur l'axe, \vec{r} est parallèle à \vec{M} . On obtient : $\vec{B}(d) = \frac{\mu_0}{4\pi d^3} 2\vec{M}$.
- (b) AN : $B_{Fe} = 0,92$ nT et $B_{Fe_8} = 4,6$ nT.
- (c) Le champ B_0 doit être à peu près uniforme sur toute la surface de la sonde. Celle-ci doit donc être de la même taille que la particule, donc très petite.

2. Champ magnétique de la matière solide

- (a) $\vec{J}_a = \text{rot } \vec{M} = \vec{0}$ et $\vec{J}_{sa} = \vec{M} \wedge \vec{n} = M\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = M \sin \theta \vec{e}_\varphi$.
- (b) On découpe la sphère en spires élémentaires vues du centre sous un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$. Une spire élémentaire est parcourue par le courant : $dI = J_{sa} R d\theta = MR \sin \theta d\theta$, elle crée au centre le champ magnétique :

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2R \sin \theta} dI \sin^3 \theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z$$

On somme ces champs élémentaires en faisant varier θ de 0 à π . Tous calculs faits, on obtient : $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$.

- (c) La sphère est assimilable, vue de l'extérieur, à un dipôle de moment $\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$. Elle crée le champ : $\vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left(3 \left(\vec{M} \cdot \vec{r} \right) \vec{r} - r^2 \vec{M} \right)$

- (d) En un point de la surface :

$\vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{4}{3} \pi R^3 \left(\frac{3M \cos \theta}{R^3} \vec{e}_r - \frac{M}{R^3} \vec{e}_z \right) = \frac{\mu_0}{3} (3M \cos \theta \vec{e}_r - M \vec{e}_z)$. Sachant que $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$. Donc $\vec{B}_{\text{ext}} - \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 M \sin \theta \vec{e}_\theta = \mu_0 \vec{J}_{sa} \wedge \vec{n}$: les relations de passage du champ magnétique à la surface de la sphère sont satisfaites. La solution trouvée est donc la bonne.

- (e) On en déduit qu'en un point de l'axe, à la surface extérieure de la sphère :

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

3. Aimantation d'un cristal ferromagnétique

Le moment magnétique d'un atome est $\mathcal{M} = \sigma_{\mu_B} \mu_B$, il y a $\frac{\rho \mathcal{N}}{M_0}$ atomes par unité de volume donc $M = \frac{\rho \mathcal{N}}{M_0} \sigma_{\mu_B} \mu_B$ à saturation où tous les dipôles sont alignés.

AN : pour le fer : $\mu_0 M_{\text{sat}} = 2,2$ T.

4. Aimantation d'un cristal paramagnétique

- (a) $M_{\text{sat}} = n \mu_B$ donc $\mu_0 M_{\text{sat}} = 24$ mT. C'est bien plus faible que ce que l'on a trouvé pour le fer, c'est normal car le cristal ici est paramagnétique (pas d'interaction entre dipôles) alors que le cristal de fer est ferromagnétique (interactions entre dipôles).

- (b) i. $\mu_0 M = \chi B_0 = 0,25 \mu\text{T} \ll \mu_0 M_{\text{sat}}$.

- ii. Sans DPPH, le champ est \vec{B}_0 . En présence de DPPH, c'est $\vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$. Donc $\Delta B = \frac{2}{3} \mu_0 M = 167$ nT avec $M = M_0$.

On constate que $\Delta B \ll B_0$ ce qui rend la mesure difficile à réaliser.

5 Résonance paramagnétique électronique

5.1 Effet gyroscopique et précession de Larmor

1. $\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$, $\vec{F} = \vec{0}$ dans un champ uniforme et $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.
2. Le théorème du moment cinétique (en un point fixe) appliqué au dipôle s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}. \text{ Or } \vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}, \text{ d'où } \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = \gamma B_0 \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_z = -\omega_L \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{e}_z \text{ (attention, } \gamma < 0 \text{).}$$

On en déduit : $\vec{\mathcal{M}} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = 0$ donc $\|\vec{\mathcal{M}}\| = \text{cste}$, puis $\frac{d(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \cdot \vec{B} = 0$. Or $\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = MB \cos \theta$ où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{B} . Cet angle est constant : le moment magnétique tourne autour de l'axe Oz à la pulsation de Larmor ω_L . On peut écrire : $\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = (-\gamma B \vec{e}_z) \wedge \vec{\mathcal{M}}$. Le vecteur rotation de $\vec{\mathcal{M}}$ autour de Oz est $\vec{\omega} = -\gamma B \vec{e}_z$. Comme $\gamma < 0$, le dipôle tourne dans le sens direct autour de Oz .

5.2 Configuration de mesure

1. Le théorème du moment cinétique, dans le référentiel (K) , appliqué à un dipôle s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{(K)} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}, \text{ soit : } \left(\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \right)_{(K)} = \gamma \vec{\mathcal{M}} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1).$$

Or : $\left(\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \right)_{(K)} = \left(\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \right)_{(K_t)} + \vec{\omega} \wedge \vec{\mathcal{M}}$.

On en déduit : $\left(\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \right)_{(K_t)} = \vec{\mathcal{M}} \wedge (\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1 + \vec{\omega})$. En moyennant sur tous les dipôles d'un volume mesoscopique, on obtient l'équation vérifiée par le vecteur aimantation :

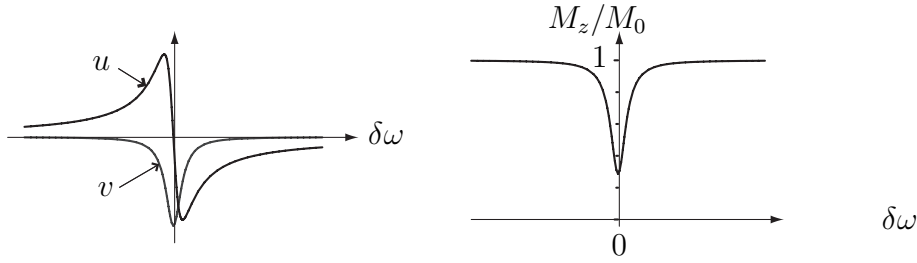
$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{(K_t)} = \vec{M} \wedge (\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1 + \vec{\omega}) = \vec{M} \wedge (\delta\omega \vec{e}_z - \omega_1 \vec{u}_1)$$

Dans le référentiel tournant, le champ magnétique ressenti par les dipôles est constant.

2. $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{(K_t)} = \vec{M} \wedge (\delta\omega \vec{e}_z - \omega_1 \vec{u}_1) + \frac{\vec{M}_0 - \vec{M}(t)}{\tau}$.
3. En projetant cette équation sur les trois axes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau} + \delta\omega v \\ \frac{dv}{dt} = -\delta\omega u - \frac{v}{\tau} - \omega_1 M_z \\ \frac{dM_z}{dt} = \omega_1 v + \frac{M_0 - M_z}{\tau} \end{cases}$$

4. u est nul pour $\delta\omega = 0$, extrémal pour $\delta\omega = \pm \frac{\sqrt{1 + \omega_1^2 \tau^2}}{\tau}$, v est minimal pour $\delta\omega = 0$, de même que M_z . Quand $\delta\omega$ tend vers l'infini, u et v tendent vers 0 alors que M_z tend vers M_0 .

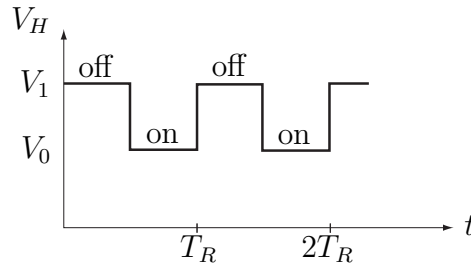


La valeur minimale de M_z est $M_z(0) = \frac{M_0}{1 + \omega_1^2 \tau^2}$. Pour $\omega = \omega_0$, l'axe de précession du spin bascule : le spin tourne alors autour de \vec{B}_1 et non plus autour de \vec{B}_0 . Par conséquent la valeur moyenne de l'aimantation selon Oz diminue.

5. $(\mu_0 M_z)_{\text{on}} = \frac{\mu_0 M_0}{1 + \omega_1^2 \tau^2}$ et $(\mu_0 M_z)_{\text{off}} = \mu_0 M_0$ donc :

$$\Delta(\mu_0 M_z) = (\mu_0 M_z)_{\text{on}} - (\mu_0 M_z)_{\text{off}} = -\mu_0 M_0 \frac{\omega_1^2 \tau^2}{1 + \omega_1^2 \tau^2} = -0,71 \mu_0 M_0$$

6. Quand le champ B_1 est allumé, $B = B_0 + \frac{2}{3}(\mu_0 M_z)_{\text{on}}$ et quand il est éteint, $B = B_0 + \frac{2}{3}(\mu_0 M_z)_{\text{off}}$. La tension V_H est donc une tension en créneaux. Comme $(\mu_0 M_z)_{\text{on}} < (\mu_0 M_z)_{\text{off}}$, V_H est maximale quand le champ est éteint, minimale quand il est allumé. L'allure de $V_H(t)$ est la suivante (avec $T_R = 1/f_R$) :



5.3 Résultats expérimentaux

1. $\delta\omega = \omega - \omega_0 = \omega - |\gamma|B_0$ donc quand B_0 varie, $\delta\omega$ varie aussi. Quand $\omega_0 = \omega$ c'est-à-dire quand $B_0 = \omega/|\gamma|$, M_z chute brusquement, $\Delta B = \frac{2}{3}\Delta(\mu_0 M_z)$ est maximal, tout comme ΔV_H , d'où le maximum observé sur la courbe expérimentale.

$$B_{0,\text{res}} = 9,4 \text{ mT}, \text{ d'où } |\gamma| = \frac{\omega}{B_{0,\text{res}}} = \frac{2\pi \times 265 \cdot 10^6}{9,4 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}.$$

On attend : $|\gamma| = \frac{e}{m_e} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$: le résultat est satisfaisant.

2. À mi-hauteur, on lit : $\Delta B_0 = 0,5 \text{ mT}$. Or, à mi-hauteur, on a : $\delta\omega \simeq \pm \frac{1}{\tau}$ donc $|\gamma|\Delta B \simeq \frac{2}{\tau}$. L'application numérique donne : $\tau \simeq 20 \text{ ns}$. L'ordre de grandeur est correct.
3. $\Delta V_{H,\text{max}} = 84 \text{ nV}$, ce qui correspond à $\Delta B_0 = 105 \text{ nT}$ avec une sonde de sensibilité $s = 0,8 \text{ V.T}^{-1}$. Or $\Delta B = \frac{2}{3}\Delta(\mu_0 M_z) = \frac{2}{3} \times 0,71\mu_0 M_0 = \frac{2}{3} \times 0,71\chi B_0$. On en déduit :
- $$\chi = \frac{3 \times 105 \cdot 10^{-9}}{2 \times 0,71 \times 9,4 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \cdot 10^{-5}. \text{ La légère différence est sans doute due au fait que le champ magnétique créé par le grain de DPPH n'est pas uniforme.}$$

5.4 Principe de la détection synchrone

1. En sortie du multiplieur, $s_X(t) = V_H(t) \sin(\omega_R t)$. Or, d'après le formulaire, la décomposition en série de Fourier de $V_H(t)$ est : $V_H(t) = \frac{V_0 + V_1}{2} + \frac{2(V_1 - V_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega_R t)}{2n+1}$.

Après le filtre, seule la composante continue de $s_X(t)$ subsiste.

Or : $\sin((2n+1)\omega_R t) \sin(\omega_R t) = \frac{1}{2} \left(-\cos((2n+2)\omega_R t) + \cos(2n\omega_R t) \right)$. La composante continue correspond au second terme de l'expression précédente pour $n=0$. Finalement, $s_{F0}(t) = \frac{(V_1 - V_0)}{\pi}$.

2. (a) Pour la partie bruit du signal, $b_X(t) = b(t) \sin(\omega_R t)$ en sortie du multiplieur. On admet que $C_X(\tau) = \frac{1}{2} C(\tau) \cos(\omega_R \tau)$. D'après la définition de la densité spectrale de bruit :

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} C(\tau) \cos(\omega_R \tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-2i\pi(f-f_R)\tau} d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-2i\pi(f+f_R)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \left(\widehat{C}_X(f+f_R) + \widehat{C}_X(f-f_R) \right) \\ &= \frac{1}{4} (S(f+f_R) + S(f-f_R)) \end{aligned}$$

- (b) En sortie du filtre, on récupère $S_X(0)$ pour $|f| < \Delta f$ et 0 sinon. On a donc, pour $|f| < \Delta f$: $S_X(f) = \frac{1}{4} (S(f_R) + S(-f_R)) = \frac{1}{2} S(f_R)$ compte tenu de la parité de $S(f)$. On obtient bien :

$$S_F(f) = \frac{1}{2} S(f_R) \text{ si } |f| < \Delta f \text{ et } S_F(f) = 0 \text{ sinon.}$$

- (c) $\langle b_F^2(t) \rangle = C_F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(f) df$. Donc : $\langle b_F^2(t) \rangle = \frac{1}{2} S(f_R) \times 2\Delta f = S(f_R) \Delta f$ Pour diminuer la valeur efficace du bruit, il faut donc diminuer Δf .

- (d) La densité spectrale de bruit est égale à : $S(f_R) = \frac{\langle b_F^2(t) \rangle}{\Delta f} = 84 \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$. Pour le bruit thermique : $S_T = 2k_B T R = 1,7 \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$.

Le bruit en $1/f$ est donc égal à $\frac{\alpha}{f_R} = 84 - 1,7 - 2,5 = 80 \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$.

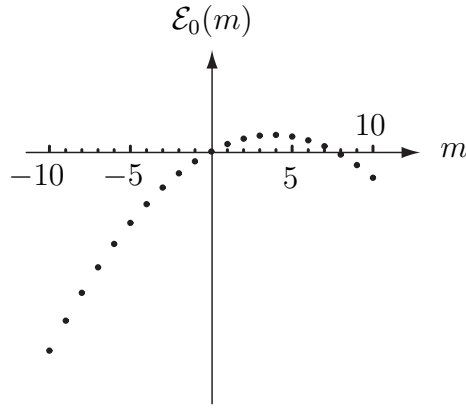
On veut $\frac{\alpha}{f'_R} < 2,5 \text{ nV}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$, ce qui donne $f'_R > 80 f_R / 2,5 \simeq 1,4 \text{ MHz}$.

6 Anisotropie magnétique et "effet tunnel de spin"

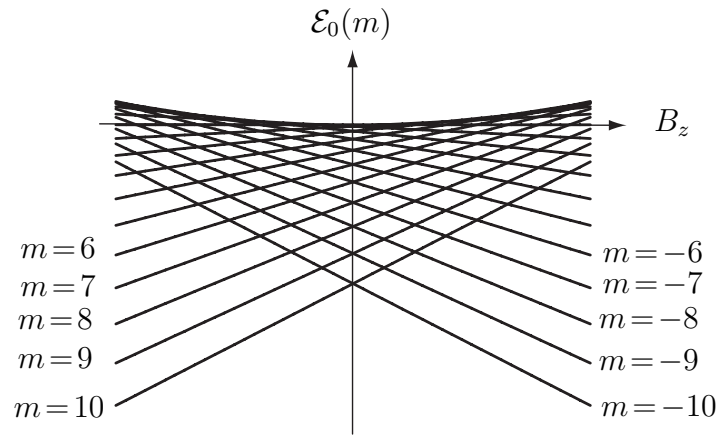
6.1 La molécule Fe₈

1. (a) $\mathcal{H}_0|m\rangle = (-Dm^2 - g\mu_B B_z m)|m\rangle$ donc $\mathcal{E}_0(m) = -Dm^2 - g\mu_B B_z m$. Quand $B_z = 0$, $\mathcal{E}_0(m) = -Dm^2$, c'est bien la courbe proposée. La fonction est paire en m . La barrière d'anisotropie à franchir est : $\Delta \mathcal{E}_0 = (10)^2 D = 100D$. La température correspondante est $T_c = 27,5 \text{ K}$. Si $T < T_c$, l'agitation thermique n'est pas suffisante pour permettre au spin de se retourner.

- (b) Quand $B_z \neq 0$, $\mathcal{E}_0(m) = -Dm^2 + g|\mu_B|B_z m$ (on rappelle que $\mu_B < 0$). \mathcal{E}_0 est maximale pour $m = \frac{g|\mu_B|B_z}{2D}$. L'allure de la courbe correspondante est :



Les courbes $\mathcal{E}_0(m)$ en fonction de B_z sont :



$\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(-m')$ avec m et m' positifs pour $m' - m = \frac{g\mu_B B_z}{D}$. Comme m et m' sont entiers, les courbes se croisent quand $B_z = n \frac{D}{g\mu_B}$ où n est un entier relatif.

- (c) i. $\mathcal{H}|m\rangle = \mathcal{E}_0(m)|m\rangle + W|m\rangle$: $|m\rangle$ n'est pas un état propre de \mathcal{H} .
 ii. On considère $|\Psi\rangle = x|m\rangle + y|m'\rangle$. Alors :

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = \mathcal{E}|\Psi\rangle \Leftrightarrow x\mathcal{H}_0|m\rangle + xW|m\rangle + y\mathcal{H}_0|m'\rangle + yW|m'\rangle = \mathcal{E}x|m\rangle + \mathcal{E}y|m'\rangle$$

soit :

$$\begin{cases} x\langle m|\mathcal{H}_0|m\rangle + x\langle m|W|m\rangle + y\langle m|\mathcal{H}_0|m'\rangle + y\langle m|W|m'\rangle = \mathcal{E}x \\ x\langle m'|\mathcal{H}_0|m\rangle + x\langle m'|W|m\rangle + y\langle m'|\mathcal{H}_0|m'\rangle + y\langle m'|W|m'\rangle = \mathcal{E}y \end{cases}$$

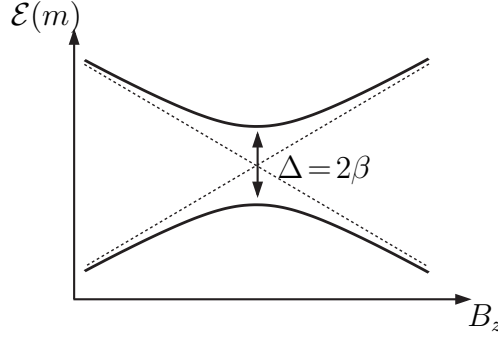
c'est-à-dire

$$\begin{cases} x\mathcal{E}_0(m) + x\delta + y\beta = \mathcal{E}x \\ x\beta + y\mathcal{E}_0(m') + y\delta = \mathcal{E}y \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} (\mathcal{E}_0(m) + \delta - \mathcal{E}x) + y\beta = 0 \\ x\beta + (\mathcal{E}_0(m') + \delta - \mathcal{E})y = 0 \end{cases}$$

Ce système en (x, y) n'a de solution différente de $(0, 0)$ que si son déterminant est nul, ce qui donne : $(\mathcal{E}_0(m) + \delta - \mathcal{E})(\mathcal{E}_0(m') + \delta - \mathcal{E}) - \beta^2 = 0$. Tous calculs faits, on trouve : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{E}_0(m) + \mathcal{E}_0(m') + 2\delta \pm \sqrt{(\mathcal{E}_0(m) - \mathcal{E}_0(m'))^2 + 4\beta^2} \right)$.



Au croisement, $\mathcal{E}_0(m) = \mathcal{E}_0(m')$ donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(m) + \delta \pm \beta$ d'où $\Delta = 2\beta$.

Les équations en x et y se simplifient en $x + y = 0$ pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(m) + \delta - 2\beta$ et $x - y = 0$ pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(m) + \delta + 2\beta$. Donc : pour la valeur propre $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(m) + \delta + 2\beta$, le vecteur propre est $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m\rangle + |m'\rangle)$ et pour la valeur propre $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(m) + \delta - 2\beta$, le vecteur propre est $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|m\rangle - |m'\rangle)$.

2. Paramagnétisme de Fe_8

- (a) Les énergies accessibles à un macro-spin sont les valeurs propres de l'hamiltonien \mathcal{H}_0 , à savoir : $\mathcal{E}_0(m) = -Dm^2 - g\mu_B B_z m$ avec $m = -10, -9, \dots, 9, 10$. La fonction de partition pour un macro-spin est donc :

$$Z = \sum_{m=-10}^{m=+10} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0(m)}{k_B T}\right) = \sum_{m=-10}^{m=+10} \exp\left(-\frac{g\mu_B B_z m}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{Dm^2}{k_B T}\right).$$

L'aimantation M est : $M = \frac{N}{Z} \sum_{m=-10}^{m=+10} m g\mu_B \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0(m)}{k_B T}\right)$

(b) $\frac{dZ}{dB_z} = \frac{g\mu_B}{k_B T} \sum_{m=-10}^{m=+10} m \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_0(m)}{k_B T}\right)$ donc on a bien : $\langle M \rangle = N k_B T \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dB_z}$.

- (c) On pose : $x = \frac{g\mu_B B_z}{k_B T}$ et $\alpha = \frac{D}{k_B T}$. Alors :

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \sum_{m=-10}^{m=+10} (\exp(mx) + \exp(-mx)) \exp(\alpha m^2) \\ &= 1 + 2 \sum_{m=-10}^{m=+10} \text{ch}(mx) \exp(\alpha m^2) \end{aligned}$$

- (d) D'où : $\frac{dZ}{dB_z} = \frac{g\mu_B}{k_B T} \frac{dZ}{dx} = \frac{2g\mu_B}{k_B T} \sum_{m=-10}^{m=+10} m \text{sh}(mx) \exp(\alpha m^2)$. Ce qui donne :

$$M = 2N g\mu_B \frac{\sum_{m=-10}^{m=+10} m \text{sh}(mx) \exp(\alpha m^2)}{1 + 2 \sum_{m=-10}^{m=+10} \text{ch}(mx) \exp(\alpha m^2)}$$

Pour T grand ou B_z faible, $x \ll 1$ donc $\text{sh}(mx) \sim mx$ et $\text{ch}(mx) \sim 1$. On obtient bien :

$$\langle M \rangle = N \frac{(g\mu_B)^2 B_z}{k_B T} \frac{2 \sum_{m=1}^{m=10} m^2 \exp(\alpha m^2)}{1 + 2 \sum_{m=1}^{m=10} \exp(\alpha m^2)}$$

- (e) sur la courbe, on peut lire la pente p de la courbe à l'origine. On lit : $p \simeq 1 \text{ T}^{-1}$. Or au voisinage de $B_z = 0$, la formule précédente est valable, d'où, avec $M_{\text{sat}} = 10g|\mu_B|$, $p = \frac{g|\mu_B|}{10k_B T} F(\alpha)$. L'application numérique donne $F(\alpha) = 71,1$. On en déduit $\alpha \simeq 0.030$ d'où $D \simeq 0.30k_B$, valeur proche de celle donnée plus haut dans le texte.

6.2 Effet tunnel magnétique

1. Tant que B_z reste négatif, la courbe $m = 10$ (voir plus haut) ne coupe aucune autre courbe. Il ne se passe rien. En $B_z = 0$, la courbe $m = 10$ croise la courbe $m = -10$, le spin peut basculer. Les cycles sont donc décrits dans le sens anti-horaire.
2. Quand B_z augmente, la courbe $m = 10$ croise successivement les courbes $m = -10$, $m = -9$, $m = -8$ etc ... On mesure sur la courbe des transitions tous les $0,22 \text{ T}$. Or, au niveau des croisements donc des transitions possibles, $B = \frac{nD}{g\mu_B}$. On en déduit :

$$\frac{D}{g\mu_B} = 0,22, \text{ ce qui donne : } \frac{D}{k_B} = 0,32 \text{ K.T}^{-1}.$$

3. La probabilité de transition diminue quand la vitesse de balayage augmente ce que confirme bien la formule LZS.

Le premier saut sur la courbe de vitesse de balayage la plus faible correspond à une variation de M/M_{sat} de l'ordre de $0,25\%$ donc $P_{10,-10} \simeq 2,5 \cdot 10^{-3}$.

4. Quand $P \ll 1$, $P \sim \frac{\pi \Delta^2}{2\hbar g |\mu_B| 20 \left| \frac{dB_z}{dt} \right|}$, d'où $\Delta = 4,2 \cdot 10^{-29} \text{ J} = 2,7 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$.

Avec $\Delta = k_B T$, on en déduit $T = 0,3 \mu\text{K}$.