

# Couplage fort de deux oscillateurs

Corrigé

## Première partie

# Circuits électriques couplés

## 1 Equations différentielles couplées

1.

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e(t)$$
$$R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

2. En dérivant par rapport au temps on obtient les équations demandées.

3. Les trois matrices, réelles et symétriques, sont diagonalisables. caractérisent respectivement le terme inductif, le terme dissipatif et le terme capacitif.

(a) Les trois matrices, réelles et symétriques, sont diagonalisables, mais pas forcément sur la même base. Le découplage rigoureux des équations n'est possible que si la matrice représentant les termes dissipatifs peut se diagonaliser sur la même base que les deux autres matrices.

(b) Non, ce n'est pas possible quand  $R_1 \neq R_2$

4. On suppose dans cette question que  $R_1 = R_2$ .

(a) En additionnant ou soustrayant les deux relations différentielles couplées, on obtient :

$$(L + M) \frac{d^2(i_1 + i_2)}{dt^2} + R \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + \frac{1}{C}(i_1 + i_2) = \frac{de}{dt}$$
$$(L - M) \frac{d^2(i_1 - i_2)}{dt^2} + R \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + \frac{1}{C}(i_1 - i_2) = \frac{de}{dt}$$

Il s'agit donc de  $i_1(t) - i_2(t)$  et de  $i_1(t) + i_2(t)$ .

(b) Ces combinaisons évoluent de manière indépendante.

## 2 Analyse du régime harmonique forcé

### 2.1 Comportement au voisinage de la résonance

5.

$$(-\omega^2 L + j\omega R_1 + \frac{1}{C})\tilde{I}_1 - \omega^2 M \tilde{I}_2 = j\omega \tilde{E}$$
$$-\omega^2 M \tilde{I}_1 + (-\omega^2 L + j\omega R_2 + \frac{1}{C})\tilde{I}_2 = 0$$

Soit encore en divisant les deux équations par  $-L$  :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - j\omega R_1/L - 1/(LC) & \omega^2 M/L \\ \omega^2 M/L & \omega^2 - j\omega R_2/L - 1/(LC) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = -\frac{j\omega}{L} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

on obtient le résultat annoncé en identifiant :

$$\gamma_1 = \frac{R_1}{L} \quad \gamma_2 = \frac{R_2}{L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \frac{M}{L} \omega_0 = \frac{M}{L} \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0$$

6.

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \sim 2\omega_0\Delta \quad \omega^2\Omega_1/\omega_0 \sim \omega_0\Omega_1 \quad -\frac{j\omega}{L} \sim -\frac{j\omega_0}{L}$$

D'où, en divisant par  $\omega_0$ , le résultat demandé.

## 2.2 Fonction de transfert

7.

$$\tilde{I}_2 = \frac{j\Omega_1}{L} \frac{1}{(2\Delta - j\gamma_1)(2\Delta - j\gamma_2) - \Omega_1^2} \tilde{E}$$

Sachant que  $\tilde{U} = -R_2\tilde{I}_2$ , la fonction de transfert s'écrit :

$$\tilde{H}(\Delta) = -j\Omega_1\gamma_2 \frac{1}{(2\Delta - j\gamma_1)(2\Delta - j\gamma_2) - \Omega_1^2}$$

8.

$$|\tilde{H}(\Delta)| = \Omega_1\gamma_2 \frac{1}{\sqrt{[4\Delta^2 - \Omega_1^2 - \gamma_1\gamma_2]^2 + 4\Delta^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2}} = \frac{\Omega_1\gamma_2}{\sqrt{f(\Delta, \Omega_1)}}$$

9. (a) Le module de la fonction de transfert en  $\Delta = 0$  s'écrit :

$$|\tilde{H}(\Delta = 0)| = \frac{\Omega_1\gamma_2}{\Omega_1^2 + \gamma_1\gamma_2}$$

(b)  $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|$  croît initialement comme  $\Omega_1$  puis décroît en  $1/\Omega_1$ .

$$\frac{d|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|}{d\Omega_1} = \gamma_2 \frac{-\Omega_1^2 + \gamma_1\gamma_2}{[\Omega_1^2 + \gamma_1\gamma_2]^2}$$

La dérivée s'annule pour  $\Omega_{c2} = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}$ .

(c)

$$|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1 = \Omega_{c2})| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$$

10.

$$\frac{d|\tilde{H}(\Delta)|}{d\Delta} = 0 \Rightarrow \frac{df(\Delta, \Omega_1)}{d\Delta} = 0 \Rightarrow 16\Delta(4\Delta^2 - \Omega_1^2 - \gamma_1\gamma_2) + 8\Delta(\gamma_1 + \gamma_2)^2 = 0$$

Les extréma de vérifient donc la relation :

$$\Delta[4\Delta^2 - \Omega_1^2 + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2}] = 0$$

Pour  $\Omega_1^2 < \Omega_{c3}^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/2$ , il n'y a qu'un seul maximum en  $\Delta = 0$ .

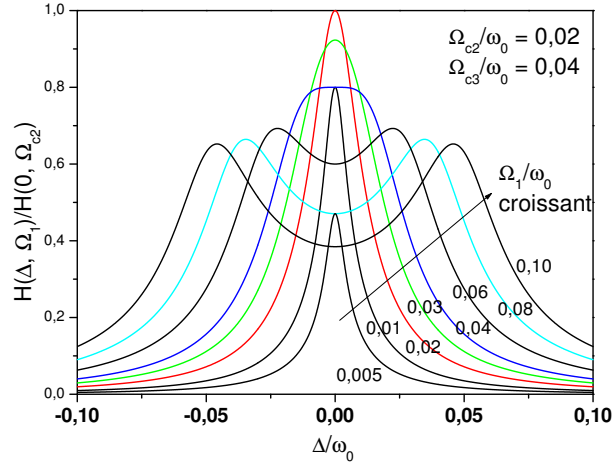
Pour  $\Omega_1^2 > \Omega_{c3}^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/2$ , il y a un minimum en  $\Delta = 0$  et deux maxima en

$$\Delta_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_{c3}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2}}$$

L'écart entre les pics est donc plus petit que la séparation entre les pulsations  $\omega_+$  et  $\omega_-$ .

11. En fonction des pulsations réduites :

$$\frac{|\tilde{H}(\Delta)|}{|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1 = \Omega_{c2})|} = 2 \frac{\Omega_1}{\omega_0} \frac{\Omega_{c2}}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{[4(\frac{\Delta}{\omega_0})^2 - (\frac{\Omega_1}{\omega_0})^2 - (\frac{\Omega_{c2}}{\omega_0})^2]^2 + 8(\frac{\Delta}{\omega_0})^2[(\frac{\Omega_{c2}}{\omega_0})^2 + (\frac{\Omega_{c3}}{\omega_0})^2]}}$$



12. (a) La fonction de transfert en  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  s'écrit :

$$|\tilde{H}(\Delta = \Delta_{\pm})| = \Omega_1 \gamma_2 \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 [\Omega_1^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2]}}$$

Pour  $\Omega_1^2 \gg \Omega_{c3}^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/2$ , la hauteur des pics devient constante et égale à

$$|\tilde{H}(\Delta = \Delta_{\pm})| \sim \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

- (b)

$$\begin{aligned} f(\Delta_{\pm} + \eta, \Omega_1) &= [4(\Delta_{\pm} + \eta)^2 - \Omega_1^2 - \gamma_1 \gamma_2]^2 + 16\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 (\Delta_{\pm} + \eta)^2 \\ &= [4\Delta_{\pm}^2 + 8\Delta_{\pm}\eta + 4\eta^2 - \Omega_1^2 - \gamma_1 \gamma_2]^2 + 4\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 (4\Delta_{\pm}^2 + 8\Delta_{\pm}\eta + 4\eta^2) \\ &= [-2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 + 8\Delta_{\pm}\eta + 4\eta^2]^2 + 4\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 [4\Delta_{\pm}^2 + 8\Delta_{\pm}\eta + 4\eta^2] \\ &= f(\Delta_{\pm}, \Omega_1) + 0\eta + 16[4\Delta_{\pm}^2 + \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2] \eta^2 = 4\left[\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2 + 4\eta^2\right] [\Omega_1^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2] \end{aligned}$$

La fonction de transfert chute à -3dB lorsque  $f(\Delta_{\pm} + \eta, \Omega_1) = 2f(\Delta_{\pm}, \Omega_1)$ , donc

$$\eta_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)$$

La largeur des pics à -3dB est donc :  $2|\eta_{\pm}| = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$

### 2.3 Filtres à résonateurs couplés

13. Pour  $\Omega_1 = \Omega_{c3}$ , on a :

$$|\tilde{H}(\Delta)| = \frac{\Omega_1 \gamma_2}{\sqrt{[4\Delta^2 - 2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2]^2 + 16\Delta^2 \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2}} = \frac{\Omega_1 \gamma_2}{\sqrt{16\Delta^4 + 4\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^4}}$$

Donc au voisinage de  $\Delta = 0$ , tant que  $|\Delta| \ll \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$  :

$$|\tilde{H}(\Delta)| = \frac{\Omega_1 \gamma_2}{2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\frac{\Delta^4}{\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^4}}} \sim \frac{\Omega_1 \gamma_2}{2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^2} \left[1 - 2\frac{\Delta^4}{\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)^4}\right]$$

A cette valeur du couplage les trois premières dérivées en zéro sont nulles ; la bande est "la plus plate possible".

14.  $\Omega_{c2} = \Omega_{c3} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$

15. Il faut choisir  $\Omega_1 = \gamma$

16.

$$|\tilde{H}(\Delta)| = \frac{\Omega_1 \gamma_2}{\sqrt{16\Delta^4 + 4\gamma^4}} = \frac{|\tilde{H}(\Delta = 0)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 16\Delta^4 + 4\gamma^4 = 8\gamma^4 \Rightarrow \Delta = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$$

Donc la bande passante est  $2|\Delta| = \sqrt{2}\gamma$

17.  $\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\Omega_1}{2\pi} = 100 \text{ kHz}.$

### 3 Analyse en régime libre

#### 3.1 Recherche des modes propres approchés

18.  $\omega > 0$  est la pulsation et  $\gamma > 0$  caractérise l'amortissement de l'oscillation, dont l'amplitude décroît en  $\exp(-\frac{\gamma}{2}t)$  et l'énergie en  $\exp(-\gamma t)$ .

19. Le système d'équations sans second membre n'admet de solutions non nulles que si le déterminant est nul :

$$\det \begin{pmatrix} 2\tilde{\Delta} - j\gamma_1 & \Omega_1 \\ \Omega_1 & 2\tilde{\Delta} - j\gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4\tilde{\Delta}^2 - 2j(\gamma_1 + \gamma_2)\tilde{\Delta} - \gamma_1\gamma_2 - \Omega_1^2 = 0$$

Discriminant réduit :  $4\Omega_1^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2$

20. (a) Couplage faible :  $\Omega_1 < \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$

$$\tilde{\Delta} = j\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{4} \pm \frac{j}{2}\sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2 - \Omega_1^2}$$

D'où les valeurs de  $\omega_{\pm} = \Re[\omega_0 + \tilde{\Delta}]$  et  $\gamma_{\pm} = 2\Im[\omega_0 + \tilde{\Delta}]$

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \quad \gamma_{\pm} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2 - \Omega_1^2}$$

Les deux modes propres approchés ont la même pulsation  $\omega_0$ , et des coefficients d'amortissement différents, qui varient de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à couplage nulle, jusqu'à la valeur commune  $(\gamma_1 + \gamma_2)/2$  lorsque le couplage  $\Omega_1$  atteint la valeur critique  $\Omega_{c1}$ .

(b) Couplage fort :  $\Omega_1 > \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$

$$\tilde{\Delta} = j\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_1^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2}$$

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_1^2 - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2} \quad \gamma_{\pm} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \gamma$$

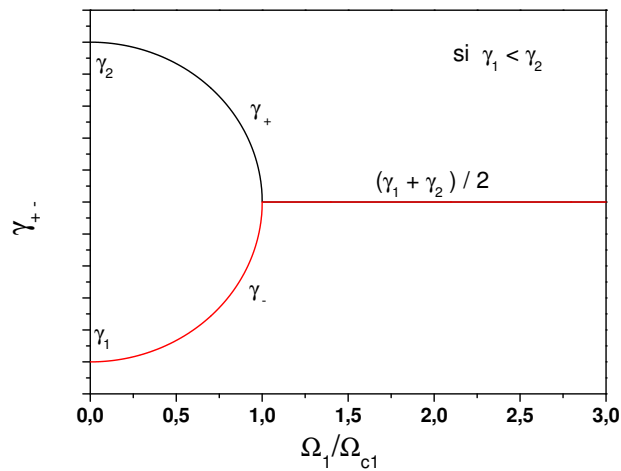
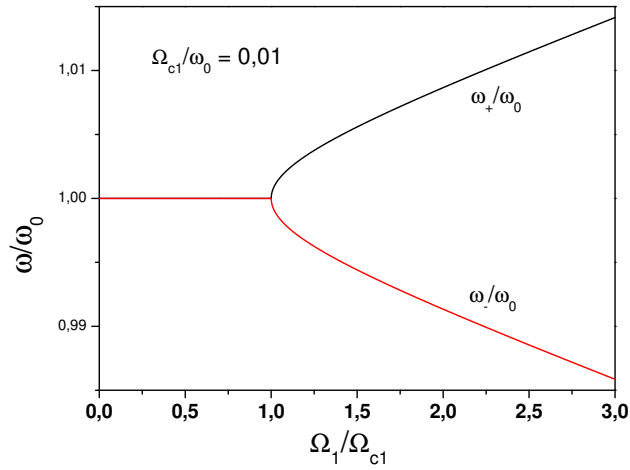
Les deux modes propres approchées ont des pulsations dont l'écart augmente avec le couplage, et possèdent le même coefficient d'amortissement, égal à la moyenne des coefficients d'amortissement des deux circuits non couplés.

21.

$$\frac{\omega_{\pm}}{\omega_0} = 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\Omega_{c1}}{\omega_0} \sqrt{\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_{c1}}\right)^2 - 1}$$

22.

$$\gamma_{\pm} = \gamma \pm \Omega_{c1} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_{c1}}\right)^2\right)}$$



### 3.2 Evolution temporelle en couplage fort

23. La solution générale est donc de la forme :

$$i_1(t) = A_+ \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_+t + \varphi_+) + A_- \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_-t + \varphi_-)$$

$$i_2(t) = -A_+ \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_+t + \varphi_+) + A_- \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_-t + \varphi_-)$$

24. (a)

$$i_1(t) = A_+ \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_+t + \varphi_+) \quad \text{et} \quad i_2(t) = -A_+ \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_+t + \varphi_+)$$

Courants de même amplitude et en opposition de phase.

(b)

$$i_1(t) = A_- \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_-t + \varphi_-) \quad \text{et} \quad i_2(t) = A_- \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_-t + \varphi_-)$$

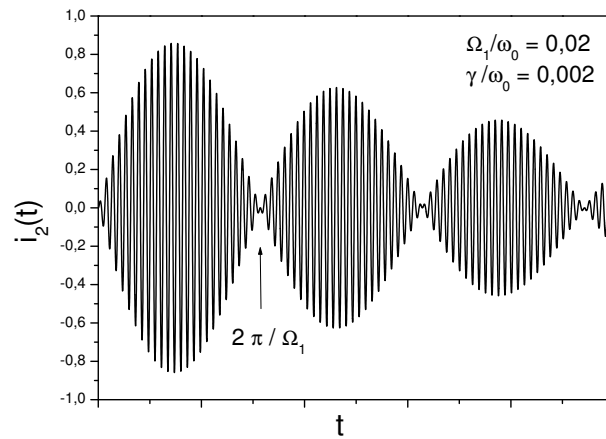
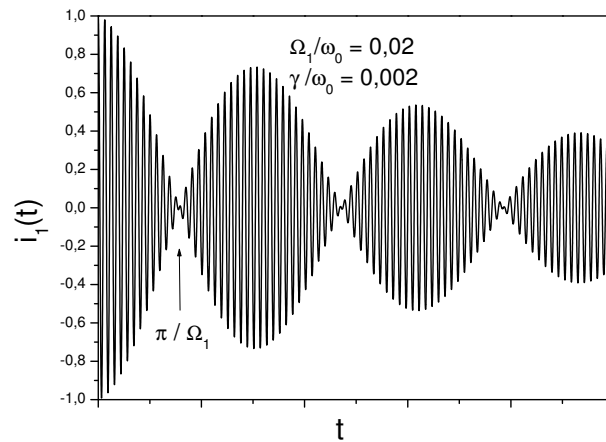
Courants de même amplitude et de même phase.

25. Avec les conditions initiales choisies :

$$i_1(t) = \frac{i_0}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) [\cos(\omega_+t) + \cos(\omega_-t)] = i_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_{c1}^2}}{2}t\right) \cos(\omega_0t)$$

$$i_2(t) = \frac{i_0}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) [-\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] = i_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\Omega_1^2 - \Omega_{c1}^2}}{2}t\right) \sin(\omega_0 t)$$

26. Evolution des courants (on suppose  $\Omega_1 \gg \Omega_{c1}$ )



27. Phénomène de battement. Chacun des courants est la somme de deux courants sinusoïdaux de pulsations différentes mais de même amortissement.

- (a) L'énergie est entièrement passée au circuit 2 au bout d'un temps égal à  $\pi/\Omega_1$ .
- (b) Elle est entièrement revenue au circuit 1 au bout de d'un temps égal à  $2\pi/\Omega_1$ . Seule la phase du courant a changé de  $\pi$ .

### 3.3 Préparation du système dans un état déterminé

- 28. (a) impulsion  $\pi$  : durée  $\pi/\Omega_1$
- (b) impulsion  $\frac{\pi}{2}$  : durée  $\pi/(2\Omega_1)$

## Deuxième partie

# Couplage fort lumière-matière en cavité

## 1 Caractéristiques de la cavité sans oscillateurs

### 1.1 Accord de phase et finesse

29.

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega}{c} 2n_B L$$

30. (a)

$$A_{1s} = t'_1 A'_C - r_1 A_{1e}$$

$$A_C = r_1 A'_C + t_1 A_{1e}$$

(b)

$$A'_C = r_2 \exp[j\Phi(\omega)] A_C$$

(c)

$$A_{2s} = t'_2 \exp[j\Phi(\omega)/2] A_C$$

(d)

$$A_C = r_1 r_2 \exp[j\Phi(\omega)] A_C + t_1 A_{1e} \Rightarrow A_C = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 \exp[j\Phi(\omega)]} A_{1e}$$

$$\Rightarrow A_{2s} = \frac{t_1 t'_2 \exp[j\Phi(\omega)/2]}{1 - r_1 r_2 \exp[j\Phi(\omega)]} A_{1e}$$

31.

$$T_C^{sans}(\omega) = \left| \frac{A_{2s}}{A_{1e}} \right|^2 = \frac{T^2}{[1 - R]^2 + 4R \sin^2(\Phi(\omega)/2)}$$

32. (a)  $\Phi(\omega_0) = p2\pi$  avec  $p$  entier.

(b)

$$\Delta_{ISL} = \omega_{m+1} - \omega_m = 2\pi \frac{c}{2Ln_B}$$

(c)

$$T_{Cmax} = \frac{T^2}{(1 - R)^2}$$

33.

$$\varepsilon(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi(\omega_m) = (\omega - \omega_m) \frac{2Ln_B}{c} = (\omega - \omega_m) \frac{2\pi}{\Delta_{ISL}}$$

34.

$$\varepsilon(\omega) = 2\pi \frac{\Delta}{\Delta_{ISL}} \ll 1 \Rightarrow \sin^2(\Phi(\omega)/2) = \sin^2(\varepsilon(\omega)/2) \sim (\varepsilon(\omega)/2)^2 \quad \text{d'où le résultat.}$$

35. (a)

$$T_C^{sans}(\pm \frac{\gamma_C}{2}) = \frac{T_{Cmax}}{2}$$



(b)

$$\gamma_C = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \Delta_{ISL} = \frac{c}{n_B L} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

(c)

$$F = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

## 1.2 Durée de vie du mode de cavité

36.  $\tau = 2Ln_B/c$

37. On obtient un mode (quasi-stationnaire) dans la cavité, dont l'amplitude va décroître lentement dans le temps.

38.

$$A'_C(t) = r_2 A_C(t - \tau)$$

39.

$$A_C(t) = r_1 A'_C(t) \Rightarrow A_C(t) = r_1 r_2 A_C(t - \tau) = R A_C(t - \tau)$$

40.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_C(t) - A_C(t - \tau) &= -[1 - R] A_C(t - \tau) \sim -[1 - R] A_C(t) \\ \Rightarrow \frac{dA_C}{dt} &\sim \frac{A_C(t) - A_C(t - \tau)}{\tau} = -\frac{[1 - R]}{\tau} A_C(t) \end{aligned}$$

41. D'où  $\frac{\gamma}{2} = \frac{1-R}{\tau}$ .

42. l'amplitude dans la cavité décroît en  $\exp(-\frac{\gamma}{2}t)$  et l'énergie en  $\exp(-\gamma t)$

$$\gamma = 2 \frac{1-R}{\tau} = \frac{2(1-R)c}{2Ln_B} \sim \gamma_C \text{ car } \sqrt{R} \sim 1$$

43.  $A_{2s} = t'_2 A_C$  varie en  $\exp(-\frac{\gamma c}{2}t)$ . D'où  $I_s(t) = I_0 \exp(-\gamma_C t)$  et la durée caractéristique du signal est  $\delta T = 1/\gamma_C$ .

## 2 Oscillateurs de Lorentz

### 2.1 Electron élastiquement lié

44.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m\gamma_A \vec{v} + m\omega_0^2 \vec{r} = -e\vec{E}(t)$$

45.

$$\tilde{\chi} = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + j\omega\gamma_A - \omega_0^2} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + j\omega\gamma_A - \omega_0^2}$$

46. Dans un domaine spectral étroit autour de la pulsation  $\omega_0$ ,

$$\tilde{\chi} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{1}{2\Delta + j\gamma_A}$$

## 2.2 Absorption et dispersion

47. Sachant que la partie réelle de  $\tilde{n}$  est positive,

$$\tilde{n} = \tilde{\epsilon}_r^{1/2} = \epsilon_{rB}^{1/2} \left(1 + \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\epsilon_{rB}}\right)^{1/2} = \epsilon_{rB}^{1/2} \left(1 + \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{2\epsilon_{rB}}\right) = \sqrt{\epsilon_{rB}} + \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{2\sqrt{\epsilon_{rB}}}$$

48.

$$n = \Re[\tilde{n}] \quad \alpha = 2\frac{\omega}{c}\Im[\tilde{n}] \sim 2\frac{\omega_0}{c}\Im[\tilde{n}] \quad \text{au voisinage de la résonance}$$

49.

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= n_B - \frac{1}{2n_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{1}{2\Delta + j\gamma_A} = n_B - \frac{1}{2n_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{2\Delta - j\gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \\ &= n_B - \frac{1}{n_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\Delta}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} + j \frac{1}{2n_B} \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \end{aligned}$$

D'où les relations demandées en posant :

$$\alpha_0 = \frac{\omega_p^2}{n_B c \gamma_A}$$

50.

$$\alpha_0 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 n_B c \gamma_A}$$

$\alpha_0$  est proportionnel à N.

51. La largeur à mi-hauteur du pic d'absorption est  $\gamma_A$ .

## 3 Caractéristiques de la cavité avec oscillateurs

### 3.1 Effet de la dispersion

52.

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega}{c} 2Ln(\omega)$$

53. (a) La cavité vide étant accordée pour la pulsation  $\omega_0$ , elle le reste en présence des oscillateurs car  $n(\omega_0) = n_B$

$$\Phi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{c} 2L[n(\omega_0)] = p2\pi \quad \text{avec } p \text{ entier}$$

(b) La relation d'accord de phase est donc

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega}{c} 2Ln(\omega) = p2\pi = \frac{\omega_0}{c} 2L[n(\omega_0)] \quad \text{donc } n(\omega) = n_B \frac{\omega_0}{\omega}$$

(c) Il y a trois solutions si le terme résonnant est suffisamment fort.

54. Le désaccord de phase  $\varepsilon(\omega)$  s'écrit :

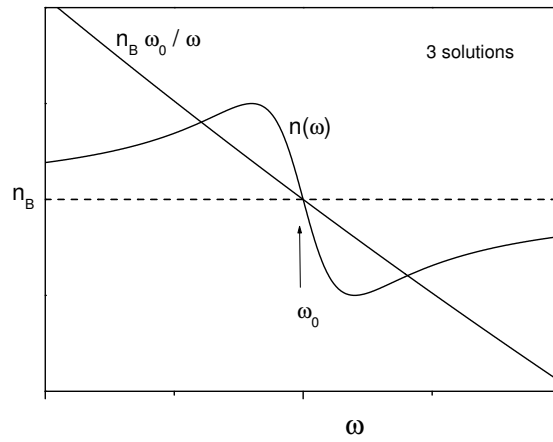
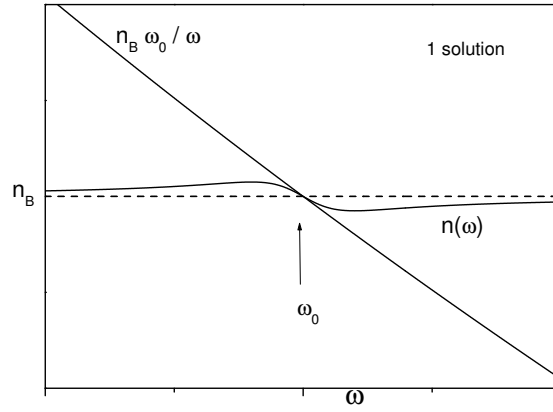
$$\varepsilon(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi(\omega_0) = (\omega - \omega_0) \frac{2Ln_B}{c} + \frac{\omega}{c} 2L[n(\omega) - n_B]$$

55.

$$\varepsilon(\omega) = 2\pi \frac{\Delta}{\Delta_{ISL}} - 2\alpha_0 L \frac{\Delta \gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} = 2\pi \frac{\Delta}{\Delta_{ISL}} \left[1 - \frac{\beta^2}{4\Delta^2 + \gamma_A^2}\right]$$

avec

$$\beta = \sqrt{\frac{F\alpha_0 L \gamma_A \gamma_C}{\pi}}$$



56.

$$\beta = \sqrt{\frac{2\pi c}{2Ln_B} \frac{\omega_p^2}{n_{BC}\gamma_A} \frac{L\gamma_A}{\pi}} = \frac{\omega_p}{n_B}$$

57.

$$\varepsilon(\omega) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \text{ ou } 4\Delta^2 + \gamma_A^2 = \beta^2$$

Pour  $\beta < \beta_c = \gamma_A$  : une seule solution en  $\Delta = 0$ .

Pour  $\beta > \beta_c = \gamma_A$  : trois solutions en  $\Delta = 0$  et en  $\Delta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - \gamma_A^2}$ .

58.  $\beta$  varie comme  $\sqrt{N}$ . Il faut choisir une concentration élevée.

59. Le pic d'absorption à  $\Delta = 0$  supprime la résonance centrale.

### 3.2 Effets de la dispersion et de l'absorption

60. Il suffit de pondérer les amplitudes d'un facteur  $\exp(-\alpha(\omega)L/2)$  pour un aller.

61. immédiat.

62. On obtient successivement :

$$1 - R + \alpha(\omega)L = \frac{\pi}{\Delta_{ISL}} \left[ \gamma_C + \frac{\beta^2 \gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \right]$$

$$T_C(\Delta) = \left( \frac{\Delta_{ISL}}{\pi} \right)^2 \frac{T^2}{\left[ \gamma_C + \frac{\beta^2 \gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \right]^2 + 4\Delta^2 \left[ 1 - \frac{\beta^2}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \right]^2}$$

En remplaçant  $4\Delta^2$  par  $u - \gamma_A^2$  et en développant, on obtient l'expression :

$$T_C^{avec}(\Delta) = T_C^{max} \frac{\gamma_C^2}{u - (2\beta^2 + \gamma_A^2 - \gamma_C^2) + \beta^2(\beta^2 + 2\gamma_A^2 + 2\gamma_A\gamma_C)/u}$$

D'où la relation proposée.

(a)

$$\frac{dT_C}{d\Delta} = \frac{dT_C}{du} \frac{du}{d\Delta} = 8\Delta \frac{dT_C}{du} = 0 \rightarrow 1 - (\Omega^2 + \gamma_A^2)^2/u^2 = 0 \text{ ou } \Delta = 0$$

Donc  $\Delta_{\pm} = \pm\Omega/2$  ou  $\Delta = 0$ .

(b) Lorsque  $\beta$  est grand devant  $\gamma_A$  et  $\gamma_C$ , on a

$$\Omega^2 = \sqrt{\beta^2(\beta^2 + 2\gamma_A^2 + 2\gamma_A\gamma_C) - \gamma_A^2} \sim \beta^2 + \gamma_A\gamma_C$$

(c)

$$\frac{T_C(\Delta_{\pm})}{T_{Cmax}} = \frac{\gamma_C^2}{\Omega^2 + \gamma_A^2 - (2\beta^2 + \gamma_A^2 - \gamma_C^2) + \Omega^2 + \gamma_A^2}$$

Sachant que  $\Omega^2 + \gamma_A^2 \sim \beta^2 + \gamma_A\gamma_C + \gamma_A^2$ , la hauteur des pics s'écrit simplement :

$$T_C(\Delta_{\pm}) \sim T_{Cmax} \frac{\gamma_C^2}{(\gamma_A + \gamma_C)^2}$$

(d) On a  $u(\Omega/2 + \eta) = (\Omega^2 + \gamma_A^2) + 4\Omega\eta + 4\eta^2$

Un développement à l'ordre 2 en  $\eta$  donne

$(\Omega^2 + \gamma_A^2)^2/u = (\Omega^2 + \gamma_A^2) - 4\Omega\eta - 4\eta^2 + 16\Omega^2\eta^2/(\Omega^2 + \gamma_A^2)$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{T_C(\Omega/2 + \eta)}{T_{Cmax}} &= \frac{\gamma_C^2}{2(\Omega^2 + \gamma_A^2) - (2\beta^2 + \gamma_A^2 - \gamma_C^2) + 16\Omega^2\eta^2/(\Omega^2 + \gamma_A^2)} \\ &= \frac{\gamma_C^2}{(\gamma_A + \gamma_C)^2 + 16\Omega^2\eta^2/(\Omega^2 + \gamma_A^2)} \end{aligned}$$

Les pics ont une forme lorentzienne.

(e) Donc  $T_C(\Delta)$  chute d'un facteur deux quand  $(\gamma_A + \gamma_C)^2 = 16\Omega^2\eta^2/(\Omega^2 + \gamma_A^2)$ . Sachant que  $\Omega^2/(\Omega^2 + \gamma_A^2) \sim 1$ , on obtient.

$\eta = \pm(\gamma_A + \gamma_C)/4$  et la largeur du pic vaut  $2|\eta|$  soit

$$\gamma_{AC} = \frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}$$

La largeur du pic de transmission est donc égale à la demi-somme des largeurs du pic d'absorption et du pic de transmission de la cavité hors résonance.

63. (a) On mesure sur la figure la figure 4.a) la largeur à mi-hauteur du mode de la cavité vide  $\gamma_C/(2\pi) = 30$  MHz.

(b) Pour la cavité traversée par le jet, on mesure sur la figure 4.b) : distance entre les pics de transmission de la cavité :  $\frac{\Omega}{2\pi} = 140$  MHz; largeur des pics :  $\frac{\gamma_{AC}}{2\pi} = 25$  MHz hauteur des pics de transmission :  $T_C(\Delta_{\pm}) = 0,37$ .

Les valeurs calculées sont :

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F\alpha_0 L \gamma_A \gamma_C}{\pi}} = 138 \text{ MHz} \quad \text{et} \quad \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\beta^2 + \gamma_A \gamma_C} = 140 \text{ MHz}$$

$\gamma_{AC} = (\gamma_A + \gamma_C)/2 = (20 + 30)/2 = 25$  MHz.

$$\frac{T_C(\Delta_{\pm})}{T_{Cmax}} \sim \frac{\gamma_C^2}{(\gamma_A + \gamma_C)^2} = \frac{30}{(20 + 30)^2} = 0,36$$

### 3.3 Evolution temporelle de l'intensité en sortie de cavité

64.

$$\Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}$$

65.

$$E_{2s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t_C(\omega) E_e(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega = TF[t_C(\omega) E_e(\omega)] = TF[t_C(\omega)] \otimes TF[E_e(\omega)]$$

L'impulsion étant très brève,  $TF[E_e(\omega)] \sim E_0 \delta(t)$  et  $E_{2s}(t)$  se réduit à  $TF[t_C(\omega)]$ . Sachant que  $t_C(\omega)$  est de la forme

$$t_C(\omega) = [\delta(\omega_0 + \frac{\Omega}{2}) + \delta(\omega_0 - \frac{\Omega}{2})] \otimes [\text{pic de largeur } \gamma_{AC} \text{ centré à } \omega = 0]$$

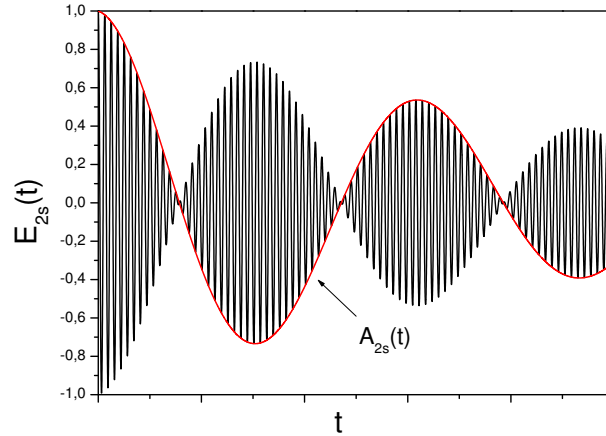
sa transformée de Fourier s'écrit :

$$TF[t_C(\omega)] = [\exp(-j(\omega_0 + \frac{\Omega}{2})t) + \exp(-j(\omega_0 - \frac{\Omega}{2})t)] \times [\text{enveloppe de largeur } \sim \frac{1}{\gamma_{AC}}] \\ = \exp[-j\omega_0 t] \times 2 \cos(\frac{\Omega}{2}t) \times [\text{pic temporel de largeur } \sim \frac{1}{\gamma_{AC}} \text{ centré à } t = 0] = E_{2s}(t)$$

66. L'enveloppe est de la forme :

$$A_{2s}(t) = 2 \cos(\frac{\Omega}{2}t) \times [\text{pic temporel de largeur } \sim \frac{1}{\gamma_{AC}} \text{ centré à } t = 0]$$

Les variations de  $E_{2s}(t)$  sont analogues à celles de  $i_2(t)$  :



67. L'intensité  $I_s(t)$  mesurée en sortie est de la forme :

$$I_s(t) = I_0 [\cos^2(\frac{\Omega}{2}t)] \times [\text{terme d'amortissement de durée } \sim \frac{1}{\gamma_{AC}}]$$

C'est une impulsion de durée caractéristique  $\delta T' = 1/\gamma_{AC}$ , et qui présente des oscillations de période  $T_{osc} = 2\pi/\Omega$ .

68. La période d'oscillation est  $T_{osc} = 0,9$  ps et la durée de vie est  $\delta T' = 4,5/\ln(20) = 1,5$  ps. D'où

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T_{osc}} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_{AC}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \tau} = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

69.  $\tau = 2Ln_B/c < \Delta t < 2\pi\Omega = T_{osc}$  soit, en prenant  $n_B = 3$ ,  $10^{-13}$  s  $< \Delta t < 10^{-11}$  s

## Troisième partie

# Couplage entre états quantiques

## 1 Couplage entre deux états discrets

70.

$$\hbar\omega_{\pm} = \hbar\omega_0 \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_1$$

71.

$$|\psi_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|e, 0 \rangle + |g, 1 \rangle] \quad \text{et} \quad |\psi_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|e, 0 \rangle - |g, 1 \rangle]$$

72.

$$\begin{aligned} |\psi(0) \rangle &= |e, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_+ \rangle + |\psi_- \rangle] \\ |\psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-j\omega_+ t}|\psi_+ \rangle + e^{-j\omega_- t}|\psi_- \rangle] = \frac{e^{-j\omega_0 t}}{\sqrt{2}}[e^{-j\frac{\Omega_1}{2}t}|\psi_+ \rangle + e^{+j\frac{\Omega_1}{2}t}|\psi_- \rangle] \\ |\psi(t) \rangle &= e^{-j\omega_0 t}[\cos(\frac{\Omega_1 t}{2})|e, 0 \rangle - j \sin(\frac{\Omega_1 t}{2})|g, 1 \rangle] \end{aligned}$$

73.

$$\begin{aligned} \langle e, 0 | \psi(t) \rangle &= e^{-j\omega_0 t} \cos(\frac{\Omega_1 t}{2}) \\ P_C(t) &= |\langle e, 0 | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2(\frac{\Omega_1 t}{2}) = \frac{1 + \cos(\Omega_1 t)}{2} \end{aligned}$$

74. (a) Le système se retrouve dans l'état  $|g, 1 \rangle$  (à un facteur de phase près) si  $\Omega_1 t_1 = \pi$ .  
(b) Si  $\Omega_1 t_1 = \pi/2$ ,

$$|\psi(t_1) \rangle = e^{-j\omega_0 t_1} \frac{1}{\sqrt{2}}[|e, 0 \rangle - j|g, 1 \rangle]$$

et  $|\psi(t) \rangle$  n'évoluera plus aux instants postérieurs, alors que l'atome s'éloigne de la cavité. On a un état intriqué atome-photon, avec des corrélations non locales entre l'atome et la cavité. Si on mesure l'atome dans son état excité, alors la cavité est vide. Inversement si on mesure l'atome dans son état fondamental, alors il y a un photon dans la cavité.

75. Les fréquences de transmission de la cavité correspondent approximativement aux fréquences des états stationnaires du système atome - mode électromagnétique de cavité.

## 2 Couplage d'un état discret à un continuum large

76.

$$j\hbar \frac{d|\Psi(t) \rangle}{dt} = (H_0 + H_1)|\Psi(t) \rangle$$

77. En projetant sur  $|i \rangle$  et  $|k \rangle$ , on obtient :

$$j\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \sum_k e^{j(\omega_i - \omega_k)t} c_k(t) v^*$$

$$j\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = e^{j(\omega_k - \omega_i)t} c_i(t) v$$

78.

$$j\hbar \frac{dc_i(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_i - \omega_k)t} c_k(t) v^* \rho_0 d(\hbar\omega_k)$$

79. (a) Compte tenu des conditions initiales :

$$c_k(t) = \int_0^t dt' c_i(t') e^{j(\omega_k - \omega_i)t'} \frac{v}{j\hbar}$$

(b)

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \int d(\hbar\omega_k) \frac{v^* \rho_0}{j\hbar} e^{j(\omega_i - \omega_k)t} \int_0^t dt' c_i(t') e^{j(\omega_k - \omega_i)t'} \frac{v}{j\hbar}$$

80.

$$\begin{aligned} \frac{dc_i(t)}{dt} &= -\frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \int_0^t dt' c_i(t') \int_{-\infty}^{+\infty} d(\omega_k) e^{j(\omega_i - \omega_k)(t-t')} \\ &= -\frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \int_0^t dt' c_i(t') 2\pi \delta(t-t') = -\frac{2\pi |v|^2 \rho_0}{\hbar} \frac{c_i(t)}{2} \end{aligned}$$

Le facteur 1/2 vient du fait que le Dirac est pris à un bord du domaine d'intégration.

81.

$$\text{D'où } \frac{dc_i(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{2} c_i(t) \quad \text{avec } \Gamma = \frac{2\pi |v|^2 \rho_0}{\hbar}$$

82. En intégrant :  $c_i(t) = \exp(-\frac{\Gamma}{2}t)$ . D'où  $P(t) = |c_i(t)|^2 = \exp(-\Gamma t)$ 83. la durée de vie du système préparé dans l'état  $|i\rangle$  est  $1/\Gamma$ .

84.

$$\text{Proba par unité de temps : } p = -\frac{dP_i(t)}{dt} = \Gamma \exp(-\Gamma t) \sim \Gamma$$

On retrouve bien la règle d'or de Fermi adaptée à ce cas particulier de densité d'état constante :

$$p = \frac{2\pi}{\hbar} |v|^2 \rho_0$$

85.

$$c_k(t) = \int_0^t dt' e^{j(\omega_k - \omega_i + j\Gamma/2)t'} \frac{v}{j\hbar} \quad \text{d'où le résultat.}$$

86.

$$dP = |c_k(t)|^2 \rho_0 d(\hbar\omega) = \frac{|v|^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\omega_k - \omega_i)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \rho_0 d(\hbar\omega)$$

La loi de probabilité est lorentzienne, de largeur à mi-hauteur  $\Gamma$ . La "désintégration" de l'état discret vers le continuum donne un profil de raie d'émission de forme lorentzienne.

### 3 Transition couplage faible - couplage fort

87.

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \int d(\hbar\omega) \frac{v^*}{j\hbar} \frac{\rho_0}{1 + [(\omega_f - \omega_i)/(\gamma/2)]^2} e^{j(\omega_i - \omega_k)t} \int_0^t dt' c_i(t') e^{j(\omega_k - \omega_i)t'} \frac{v}{j\hbar}$$

88.

$$\begin{aligned} \frac{dc_i(t)}{dt} &= -\frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \int_0^t dt' c_i(t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{1 + [(\omega_f - \omega_i)/(\gamma/2)]^2} e^{j(\omega_i - \omega_k)(t-t')} \\ &= -\frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \int_0^t dt' c_i(t') \pi \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma(t-t')/2} \end{aligned}$$

89.

$$\frac{d^2 c_i(t)}{dt^2} = -\frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \pi \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} [e^{-\gamma t/2} \int_0^t dt' c_i(t') e^{\gamma t'/2}] = -\frac{\gamma}{2} \frac{dc_i(t)}{dt} - \frac{|v|^2 \rho_0}{\hbar} \pi \frac{\gamma}{2} c_i(t)$$

D'où

$$\frac{d^2 c_i(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{dc_i(t)}{dt} + \frac{\Gamma \gamma}{4} c_i(t) = 0$$

90.

$$j\hbar \frac{dc_i(t)}{dt}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_i - \omega_k)0} c_k(0) v^* \rho_0 d(\hbar\omega_k) = 0$$

car tous les  $c_k(0)$  sont nuls.91. Cas du couplage faible :  $\Gamma < \gamma/4$ .

(a)

$$c_i(t) = e^{-\gamma t/4} \left[ \cosh \frac{\sqrt{\gamma^2/4 - \gamma\Gamma} t}{2} + \frac{\gamma/2}{\sqrt{\gamma^2/4 - \gamma\Gamma}} \sinh \frac{\sqrt{\gamma^2/4 - \gamma\Gamma} t}{2} \right]$$

(b)  $\Gamma \ll \gamma/4$  et  $t \gg 1/\gamma$ , on retrouve la loi :  $c_i(t) \sim e^{-\Gamma t/2}$ 92. Cas du couplage fort :  $\Gamma > \gamma/4$ .

(a)

$$c_i(t) = e^{-\gamma t/4} \left[ \cos \frac{\sqrt{\gamma\Gamma - \gamma^2/4} t}{2} + \frac{\gamma/2}{\sqrt{\gamma\Gamma - \gamma^2/4}} \sin \frac{\sqrt{\gamma\Gamma - \gamma^2/4} t}{2} \right]$$

(b) Pour  $\Gamma \gg \gamma/4$  :  $c_i(t) \sim e^{-\gamma t/4} [\cos \frac{\sqrt{\gamma\Gamma} t}{2}]$ 

(c)

$$P(t) = |c_i(t)|^2 = e^{-\gamma t/2} \left[ \cos^2 \frac{\sqrt{\gamma\Gamma} t}{2} \right] = e^{-\gamma t/2} \frac{1 + \cos(\sqrt{\gamma\Gamma} t)}{2}$$

(d)

La pulsation est :  $\Omega = \sqrt{\gamma\Gamma}$  et le coefficient d'amortissement vaut  $\gamma/2$ 

(e)

$$\Omega = \frac{2|v|}{\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{2} \rho_0(\hbar\gamma)} = \frac{2|v|}{\hbar} \sqrt{N}$$

D'où  $N = (\pi/2) \rho_0(\hbar\gamma)$ .

En utilisant la relation (3) du formulaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(\hbar\omega) \frac{\rho_0}{1 + [(\omega_f - \omega_i)/(\gamma/2)]^2} = (\pi/2) \rho_0(\hbar\gamma) = N$$

N est le nombre total d'états du continuum. Pour  $N=1$ , on retrouve bien la pulsation

$$\Omega_1 = \frac{2|v|}{\hbar}$$

93. .

(a) En couplage faible, la très grande durée de vie  $1/\gamma_A$  de l'état excité atomique dans l'espace libre, chute à la valeur  $1\Gamma$  pour l'atome en cavité. L'effet de la cavité est de réduire le temps de vie radiatif.



(b) Le coefficient d'amortissement de l'état excité de l'atome isolé est pratiquement nul :  $\gamma_A \sim 0$ . Le coefficient d'amortissement du mode de cavité est  $\gamma$ , que nous noterons  $\gamma_C$  par analogie avec la deuxième partie. L'énergie passe alternativement de la matière à la lumière (à la pulsation  $\Omega$ ), et présente un coefficient d'amortissement  $\gamma_C/2$ , plus faible car l'énergie ne passe que "la moitié du temps" sous forme de photon. D'où le rétrécissement des pics de transmission.

On retrouve bien, pour ce système composite atome-cavité, le coefficient d'amortissement calculé dans la Deuxième partie :  $\gamma_{AC} = (\gamma_A + \gamma_C)/2 \sim \gamma_C/2$ .