

1) John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919)

Il a apporté d'importantes contributions à l'hydrodynamique, en particulier sur la similitude et la stabilité des écoulements.

Osborne Reynolds (1842-1912)

Se concentre sur l'hydraulique et l'hydrodynamique. Le fameux nombre de Reynolds est introduit lors d'un article en 1883. Il fonde la théorie de la stabilité hydrodynamique et formule la théorie de la lubrification en 1886.

George Gabriel Stokes (1819-1903)

Etude des écoulements visqueux (1851), notamment par des études expérimentales sur le mouvement d'une sphère dans un écoulement visqueux.

2) Les capacités thermiques massiques peuvent se définir à partir de l'énergie interne et de l'enthalpie massiques :

En posant $u = \left(\frac{\partial U}{\partial m}\right)_{T,P}$, énergie interne massique et $h = \left(\frac{\partial H}{\partial m}\right)_{T,P}$, les capacités s'écrivent :

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \text{ et } c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \text{ et s'expriment en } \text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

Il est aussi possible de les définir à partir de l'entropie massique $s = \left(\frac{\partial S}{\partial m}\right)_{T,P}$ par les relations :

$$c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \text{ et } c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$$

Relation de Mayer:

Dans le cas d'un gaz parfait, h et u sont indépendantes de la température et :

$$du = c_v dT; dh = c_p dT; h = u + Pv; Pv = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T,$$

où $v = 1/\rho$ désigne le volume massique.

Il vient donc : $h = u + Pv = u + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T$ et $dh = c_p dT = du + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} dT = \left(c_v + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}\right) dT$.

On obtient :

$$c_p - c_v = \mathcal{R} / \mathcal{M}.$$

Gaz parfait diatomique:

A température ambiante, $c_v = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2}\right) \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} = \frac{5}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$ (3 degrés de liberté de translation et 2 degrés de liberté de

rotation) et d'après la relation de Mayer $c_p = \frac{7}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$.

3) L'énoncé de la loi de Fourier est : $\vec{j}_{th} = -K \overrightarrow{grad} T$.

Le flux de j_{th} est égal à une puissance thermique, donc j_{th} s'exprime en W.m^{-2} . On en déduit celle de K : $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

Dans un premier temps, cette loi sous-entend que l'on puisse définir un état d'équilibre local à l'échelle mésoscopique pour pouvoir attribuer une température à chaque élément mésoscopique.

Par ailleurs, cette loi phénoménologique rend compte des transferts thermiques lorsque le déséquilibre thermique est faible. Pour un système dont l'état est trop loin de son état d'équilibre, cette loi est mise en défaut.

Ainsi, au premier ordre, on considère que la conductivité est indépendante de la température. Pour les grands écarts de température par rapport à l'état d'équilibre, elle devient fonction de la température et pour un système trop perturbé, on ne peut même plus définir la température locale.

La notion d'isotropie est différente de la notion de linéarité. Pour un milieu linéaire, lorsque le milieu est de plus isotrope, la conductivité est un scalaire. Elle devient un tenseur lorsque le milieu est linéaire et non isotrope. Le signe « - » qui apparaît dans la loi montre que le sens effectif du transfert thermique s'effectue du point le plus chaud vers le point le plus froid ce qui est conforme au second principe.

On peut dresser une analogie formelle entre les modèles décrivant la conduction électrique et la conduction thermique. La loi d'Ohm locale se substitue alors à la loi de Fourier et le tenseur des conductivités électriques à celui des conductivités thermiques.

4) La conductivité thermique est d'autant plus grande que le corps est bon conducteur.

Ordre de grandeur :

- Pour les gaz : $K_{O_2} \approx K_{N_2} \approx 0,03 \text{ W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$;
- Pour les métaux : $K_{Ag} \approx K_{Cu} \approx 400 \text{ W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$;

Pour le polystyrène expansé : $K \approx 0,004 \text{ W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$, qui est donc un solide qui possède un fort pouvoir isolant. On peut aussi citer le bois...

Fluide en l'absence de convection

Le fluide est un gaz.

5) Loi de la statique des fluides : $\overline{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$.

En effet, ici la seule action volumique qui s'exerce au sein du fluide est celle de pesanteur.

6) En prenant la différentielle logarithmique de l'équation d'état du gaz parfait, il vient :

$$P\vartheta = n\mathcal{R}T \Rightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$$

Cette relation se met sous la forme : $\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \left(1 + \frac{\vartheta}{P} \frac{dP}{d\vartheta} \right) = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$.

Soit m la masse de gaz contenue dans ϑ . On a alors $P\vartheta = m \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T$ et $\rho = m / \vartheta$.

Faisons apparaître les variations ΔP , ΔT et $\Delta \rho$ par rapport aux grandeurs lorsque $T_1 = 0$ et posons ponctuellement pour la pression, la température et la masse volumique :

$$P + \Delta P, T + \Delta T, \rho + \Delta \rho \text{ et } r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}.$$

La loi de la statique impose $\Delta P = \Delta \rho g d$ et la conservation de la masse $\Delta \rho = -m \Delta V / \vartheta^2$.

Ainsi :
$$\frac{\vartheta}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{\vartheta}{P} \frac{\Delta \rho g d}{\tau} = - \frac{m \cancel{\Delta \mathcal{R}} g d}{P \cancel{\Delta \mathcal{R}} \vartheta^2} = - \frac{g d}{r T}$$

Donc :
$$\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \left(1 - \frac{g d}{r T} \right) \approx \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$$

La condition $g d \ll r T$ consiste à considérer que l'origine de l'évolution de la masse volumique, ou du volume, est la dilatation et non un phénomène de compressibilité.

L'effet de la variation de pression sur le volume (lié au terme d'énergie massique $g d$) est négligeable par rapport à celui de la variation de température (lié au terme d'énergie massique $r T$). Ceci peut se réaliser en considérant une hauteur de fluide suffisamment faible.

Application numérique :
$$d_{\max} = rT / g \approx \frac{8,314 \times 300}{0,029 \times 9,8} \approx 9 \text{ km.}$$

Pour des hauteurs $d \ll d_{\max}$, cette approximation est correcte. La valeur de d_{\max} montre qu'il est possible de se placer dans des conditions où l'inégalité précédente est largement satisfaite.

7) Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dU = mc_v \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta W + \delta Q = -P \frac{d\mathcal{V}}{dt} dt - \iint_{\mathcal{V} \subset \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{\Sigma} dt$$

En considérant que la taille du système de volume \mathcal{V} délimité par la surface fermée Σ est mésoscopique, il vient :

$$\iint_{\mathcal{V} \subset \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \overline{d\vec{\Sigma}} dt = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j}_{th} dV \approx \text{div } \vec{j}_{th} \mathcal{V}.$$

Donc l'égalité due au premier principe se simplifie selon :

$$\rho \mathcal{V} c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -P \frac{d\mathcal{V}}{dt} - \text{div } \vec{j}_{th} \mathcal{V} \Rightarrow c_v \frac{\partial T}{\partial t} \mathcal{V} = -\frac{P}{\rho} \frac{d\mathcal{V}}{dt} - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{j}_{th} \mathcal{V}$$

8) D'après la loi de Fourier $-\text{div } \vec{j}_{th} = K \text{div } \overline{\text{grad } T} = K \Delta T$.

En utilisant les résultats de la question 6, $\frac{P}{\rho} \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{P \mathcal{V}}{\rho} \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{dt} \approx \frac{P \mathcal{V}}{\rho} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \mathcal{V} \frac{\partial T}{\partial t}$.

La synthèse des résultats conduit à :

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} \mathcal{V} = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \mathcal{V} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho} K \Delta T \mathcal{V} \Rightarrow \rho \left(c_v + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On obtient l'équation de diffusion $K \Delta T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ qui s'écrit aussi $D \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$ où $D = \frac{K}{\rho c_p}$ est la diffusivité du gaz qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

9) L'équation de diffusion permet d'écrire en ordre de grandeur :

$$D \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow D \frac{T}{d^2} \approx \frac{T}{\tau_{th}} \Rightarrow D \approx \frac{d^2}{\tau_{th}} = \frac{K}{\rho c_p}$$

Application numérique :

$$D = \frac{K}{\rho c_p} = \frac{K \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T}{P \frac{7}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}} = \frac{2}{7} \frac{KT}{P} \approx 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\tau_{th} = \frac{d^2}{D} \approx 4,3 \text{ s}$$

Le fluide est un liquide.

10) Dans le cas d'un liquide, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dU = mc_v \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta W + \delta Q = -P \frac{d\mathcal{V}}{dt} dt - \iint_{\mathcal{V} \subset \Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \overline{d\vec{\Sigma}} dt$$

Cependant, le liquide étant incompressible, de volume constant, le travail des forces de pression s'annule :

$$\delta W = -P \frac{d\mathcal{V}}{dt} dt = 0.$$

De plus, on a pour les phases condensées incompressibles, $c_v \approx c_p = c$.

Il vient donc :

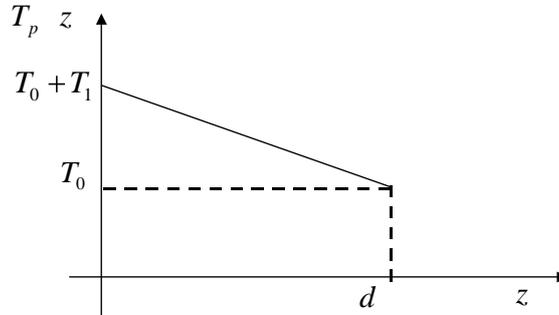
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_h \quad \text{ou} \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T$$

11) Application numérique : $\tau_{th} = \frac{\rho c_p d^2}{K} \approx \frac{10^3 \times 2.10^3 \times 10^{-4}}{0,1} \approx 2000 \text{ s} \approx 33 \text{ min.}$

12) En régime permanent $\Delta T_p = 0$. De plus, la température en $z = 0$ et $z = d$ est indépendante de x et y . Ainsi, la température ne dépend que de z .

On a donc :

$$\frac{d^2 T_p}{dz^2} = 0 \Rightarrow T_p = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{d} z.$$



Etude de la convection

Influence de la température

13) a- La définition générale des coefficients, au point $T = T_0$ et $P = P_0$, est :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P=P_0} \quad T = T_0 \quad \text{et} \quad \chi = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T=T_0} \quad P = P_0.$$

Ils s'expriment en K^{-1} pour α et en Pa^{-1} pour χ .

Pour un gaz parfait, l'expression générale devient $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P=P_0} \quad T = T_0 = \frac{p_0}{\rho_0 r T_0^2} = \frac{1}{T_0}$, et $\chi = \frac{1}{P_0}$.

13) b- D'après l'équation d'état, la variation relative de masse volumique s'écrit :

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \underbrace{-\alpha}_{\varepsilon_r^T} (T - T_0) + \underbrace{\chi}_{\varepsilon_r^P} (P - P_0), \text{ soit en ordre de grandeur } \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{T - T_0}{T_0} + \frac{P - P_0}{P_0}$$

$$\text{Donc } \varepsilon_r^T = \frac{T_0 - T}{T_0} \text{ et } \varepsilon_r^P = \frac{P - P_0}{P_0}$$

Ainsi :

$$\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| = \left| \frac{\frac{P - P_0}{P_0}}{\frac{T_0 - T}{T_0}} \right| \approx \frac{T_0}{P_0} \frac{\rho g d}{|T_1|} = \frac{g d}{r |T_1|}$$

Application numérique : $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| \approx \frac{T_0}{P_0} \frac{\rho g d}{|T_1|} = \frac{g d}{r |T_1|} \approx \frac{0,029 \times 9,8 \times 10^{-2}}{8,314 \times 1} \approx 3,4.10^{-4}$.

L'application numérique précédente montre que l'influence de la pression sur la masse volumique est négligeable devant celle de la température.

13) c- Pour un liquide, on a alors $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \underbrace{-\alpha T - T_0}_{\varepsilon_r^T} + \underbrace{\chi P - P_0}_{\varepsilon_r^P}$ donc :

$$\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| = \left| \frac{\chi P - P_0}{-\alpha T - T_0} \right| \approx \frac{\chi \rho_0 g d}{\alpha |T_1|}$$

Application numérique: $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right| \approx \frac{4,5 \times 10^{-10} \times 10^3 \times 9,8 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-4} \times 1} \approx 1,47 \cdot 10^{-4}$.

Que ce soit pour un liquide ou un gaz, le rapport $\left| \frac{\varepsilon_r^P}{\varepsilon_r^T} \right|$ est suffisamment faible pour négliger l'influence de la pression devant celle de la température sur la masse volumique.

14) a- La viscosité dynamique η est reliée à la viscosité cinématique μ par la relation $\mu = \eta / \rho$.

b- η s'exprime en Poiseuille (Pl) ou Pa.s et μ s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

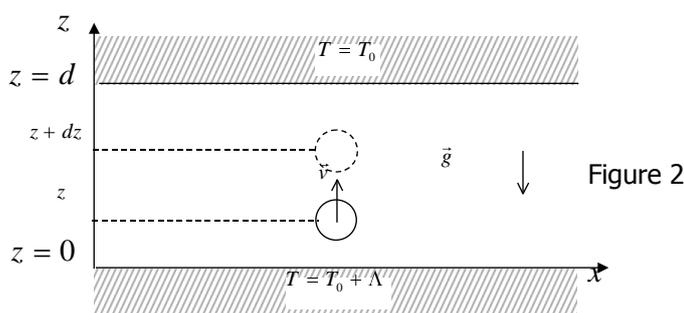
c- La viscosité dynamique des liquides est supérieure à celle des gaz, cependant cet ordre de grandeur n'est pas nécessairement respecté pour les viscosités cinématiques.

d- Dans le cas des gaz où la viscosité cinématique se confond avec le coefficient d'autodiffusion, cette dernière qui évolue en \sqrt{T} est une fonction croissante de la température.

Dans le cas des liquides, où les interactions sont plus fortes, il y a compétition entre les puits de potentiel d'interaction et l'agitation thermique qui conduit à une expression $\mu = \mu_0 \exp\left(\text{cte} \frac{T_c}{T}\right)$, la viscosité décroît avec la température.

e- On peut, par exemple, proposer le viscosimètre de Couette, formé d'un cylindre creux, fixe, rempli du liquide à étudier dans lequel on plonge un cylindre solide plein, suspendu à un fil de torsion. L'étude de l'amortissement des oscillations du cylindre mobile permet de mesurer la viscosité du fluide présent entre les parois des deux cylindres.

Approche qualitative du démarrage de la convection



15) Les échanges thermiques entre la particule et son environnement sont régis par le phénomène de diffusion thermique qui s'effectue sur une échelle spatiale de l'ordre de r et la durée du phénomène se déduit de l'équation de diffusion thermique. On a ainsi $\tau_{th} \approx \frac{r^2}{D}$. La constante A apporte un ajustement lié à la géométrie du phénomène de diffusion.

Si la durée de déplacement de l'abscisse pour aller de z à $z + \xi$ (soit ξ / v) est faible devant τ_{th} , on peut considérer que l'ascension est **adiabatique** et que la température de la particule reste sensiblement égale à $T z$ en considérant que dans le cas d'une phase condensée, le travail des forces de pression affecte très peu l'énergie interne.

16) On a $v = \frac{\xi}{\tau}$ et $\tau = \tau_{th}$ donc $v = \frac{\xi}{\tau_{th}}$. Le profil de température étant affine, la température diminue de $\theta = \frac{T_1}{d} \xi$.

17) La particule est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède (qui représente la résultante des forces de pression) et à la force de traînée due à l'action du fluide environnant. La masse volumique est une fonction décroissante de la température. La poussée d'Archimède a pour norme $m_f g$ où m_f est la masse de fluide déplacée, soit ρV . Or la masse volumique du fluide environnant augmente avec l'altitude alors que celle de la particule reste sensiblement constante. Ainsi, en s'élevant, le poids restant constant et la poussée d'Archimède ayant tendance à augmenter, la résultante verticale des actions (sans compter la force de traînée, négligeable au démarrage) est dirigée vers le haut.

18) La force par unité de volume due à la viscosité est $\eta \|\Delta \vec{v}\| \approx \eta \frac{v}{d^2}$. La composante verticale de la force volumique de pression diminuée de celle volumique du poids est :

$$\rho_0 (1 - \alpha (T - \theta - T_0)) g - \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) g = \rho_0 \alpha \theta g.$$

19) La vitesse atteint une valeur limite lorsque la force de poussée verticale est compensée par la traînée, soit :

$$\eta \frac{v}{d^2} = \alpha g \rho_0 \theta \text{ avec } \theta = \frac{T_1}{d} \xi \text{ et } v = \frac{\xi}{\tau_{th}}, \tau_{th} = A \frac{r^2}{D}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \eta \frac{v}{d^2} = \alpha g \rho_0 \theta &\Rightarrow \eta \frac{v}{d^2} = \alpha g \rho_0 \frac{T_1}{d} \xi = \alpha g \rho_0 \frac{T_1}{d} v \tau_{th} \Rightarrow \\ \eta \frac{v}{d^2} = \alpha g \rho_0 \frac{T_1}{d} v A \frac{\varepsilon^2 d^2}{D} &\Rightarrow \frac{1}{A \varepsilon^2} = \frac{\alpha g T_1 \rho_0 d^3}{D \eta} = \frac{\alpha g T_1 d^3}{D \mu} = R_a \end{aligned}$$

Soit :

$$R_a = \frac{1}{A \varepsilon^2}$$

Application numérique :

$$R_a = \frac{1}{A \varepsilon^2} \approx \frac{1}{0,01 \times 0,05} \approx 2,0 \cdot 10^3.$$

L'ordre de grandeur est correct.

20) La forme du nombre de Rayleigh montre que, la valeur critique du démarrage de la convection étant indépendante du dispositif, lorsque d augmente, alors T_1 diminue.

Mise en équation du problème

21) L'équation locale d'incompressibilité est $\text{div } \vec{v} = 0$.

L'équation de Navier Stokes est :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$$

Elle traduit la loi de la résultante dynamique à l'échelle locale appliquée à la particule de fluide.

Signification des termes :

➤ $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right)$ représente l'accélération particulaire ; $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: accélération locale ; $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}$: accélération convective) et $\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right)$, la résultante dynamique volumique de la particule de fluide.

➤ $\rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) \vec{g}$, la force volumique de pesanteur ;

➤ $-\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$, force volumique des actions de contact dues à la pression $-\overrightarrow{\text{grad}} P$ et à la viscosité $\eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$.

22) Le premier principe de la thermodynamique appliqué à une particule de fluide en mouvement s'écrit :

$$\rho c \overrightarrow{\nabla} \frac{DT}{Dt} dt = \delta Q + \delta W.$$

Le travail des forces de pression reçu par un liquide mécaniquement incompressible est nul. En négligeant la puissance développée par la force de viscosité, il ne reste que le transfert thermique. Il vient :

$$\rho c \overrightarrow{\nabla} \frac{DT}{Dt} = -\text{div} \vec{j}_{th} \quad \overrightarrow{\nabla} T \Rightarrow \rho c \frac{DT}{Dt} = K \Delta T$$

Equations linéarisées

23) En régime permanent, $\Delta T_{eq} = 0 \Rightarrow T_{eq} = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{d} z = T_0 + T_1 - \beta z$. On a $\beta = \frac{T_1}{d}$.

24) Linéarisation de l'équation de Navier Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = \rho_0 (1 - \alpha (T_{eq} - T_0)) \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P_{eq} + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} \\ \text{à l'équilibre} \quad 0 = \rho_0 (1 - \alpha (T_{eq} - T_0)) \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P_{eq} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \right) = -\alpha \rho_0 \theta \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$$

L'accélération convective étant un second ordre:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}}_{\text{Ordre 2}} \right) = -\alpha \theta \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}} p + \underbrace{\frac{\eta}{\rho_0}}_{\mu} \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$$

Linéarisation du bilan d'énergie sachant que $T_{eq} = T_0 + T_1 - \frac{T_1}{d} z = T_0 + T_1 - \beta z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (T_{eq} + \theta)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (T_{eq} + \theta) = D \Delta (T_{eq} + \theta) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (T_{eq} + \theta) = D \Delta \theta \\ 0 = D \Delta T_{eq} \end{array} \right.$$

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta$: Terme du second ordre

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_{eq} = -\beta v_z$$

Finalement:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta v_z = D \Delta \theta$$

Le terme responsable de la thermoconvection est :

$$-\alpha \theta \vec{g}.$$

Equations réduites du problème

25) On prendra :

-a Temps de diffusion : $\tau = \frac{d^2}{D}$

-b Relation : $V_1 = d / \tau$.

-c $P_1 = \rho_0 V_1^2$. Il s'agit de la pression cinétique.

-d On a $\beta = T_1 / d$.

26) Par définition $P_r = \tau / \tau'$ où $\tau = \frac{d^2}{D}$ et $\tau' = \frac{d^2}{\mu}$ donc $P_r = \mu / D$.

Le processus le plus rapide est prépondérant. Ainsi, si $P_r \ll 1$, alors $\tau \ll \tau'$ et le processus majoritaire est la diffusion thermique. Dans l'autre cas, ce sera la diffusion de matière.

Pour un gaz la viscosité cinématique est très proche de la diffusivité thermique, ainsi $P_r \approx 1$. Par contre dans le cas des liquides il peut prendre des valeurs très variables selon le caractère isolant ou conducteur thermique.

27) Le nombre de Reynolds compare le flux de quantité de mouvement d'origine convective et celui d'origine liée à la diffusion de matière.

Il représente ainsi le rapport en ordre de grandeur du terme d'accélération convective et son équivalent lié à la viscosité :

$$R_e = \left(\frac{\rho_0 V_1^2}{d} \right) / \left(\frac{\eta V_1}{d^2} \right) = \frac{\rho_0 d V_1}{\eta}$$

Le terme $\eta \bar{\Delta} \vec{v}$ est négligeable dans l'équation de Navier Stokes pour les grands nombres de Reynolds, inversement, pour les petites valeurs de ce nombre, on peut y négliger $\rho_0 \vec{v} \cdot \overline{grad} \vec{v}$.

Pour le problème étudié, le phénomène prépondérant est la diffusion puisque on étudie le seuil de démarrage de la convection, et donc le nombre de Reynolds est très faible. Ainsi, l'accélération convective peut être négligée dans l'équation de Navier-Stokes conformément à ce qui a été fait lors de sa linéarisation.

28) En posant dans les équations linéarisées $t = \tau t^*$, $x = d x^*$, $y = d y^*$ et $p = P_1 p^*$, $\theta = T_1 \theta^*$ et $v = V_1 v^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\alpha \theta \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \overline{grad} p + \mu \bar{\Delta} \vec{v} \\ \Rightarrow \frac{V_1}{\tau} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} &= -\alpha T_1 \theta^* \vec{g} - \frac{P_1}{d \rho_0} \overline{grad} p^* + \frac{\mu V_1}{d^2} \bar{\Delta} \vec{v}^* \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} &= -\frac{\alpha \tau T_1 g}{V_1} \theta^* \vec{u}_z - \frac{\tau P_1}{V_1 d \rho_0} \overline{grad} p^* + \frac{\tau \mu}{d^2} \bar{\Delta} \vec{v}^* \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{d}{\tau} = V_1$, il vient $\frac{\tau P_1}{V_1 d \rho_0} = 1$. De plus, on peut identifier $\frac{\tau \mu}{d^2} = \frac{\mu}{D} = P_r$ et

$$\gamma = \frac{\alpha \tau T_1 g}{P_r V_1} = \frac{\alpha T_1 g}{\mu} \frac{D \tau}{V_1}$$

Des relations $V_1 = \frac{d}{\tau}$ et $D = \frac{d^2}{\tau}$, on déduit $V_1 = \frac{D}{d}$ et $\gamma = \frac{\alpha T_1 g}{\mu} \frac{D\tau}{V_1} = \frac{\alpha T_1 g}{\mu} d\tau = \frac{\alpha T_1 g d^3}{\mu D} = R_a$, soit

finalement :
$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = -\overline{\text{grad}} p^* + R_a P_r \overline{\theta^*} \vec{u}_z + P_r \overline{\Delta} \vec{v}^* .$$

L'équation 3 $\frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta v_z = D\Delta\theta$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{\tau} \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \beta V_1 v_z^* &= \frac{DT_1}{d^2} \Delta\theta^* \Rightarrow \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \frac{\beta V_1 \tau}{T_1} v_z^* = \frac{\tau D}{d^2} \Delta\theta^* \\ &\Rightarrow \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - v_z^* = \Delta\theta^* \end{aligned}$$

29) En ordre de grandeur, le rapport du terme de poussée (élément moteur dans la thermoconvection) et du terme de viscosité est égal au nombre de Rayleigh.

En effet,
$$\frac{\|\alpha\theta\vec{g}\|}{\|\nu\overline{\Delta}\vec{v}\|} \approx \frac{\alpha T_1 g}{\nu v / d^2} \approx \frac{T_1 g \alpha d^2 \tau}{\nu d} \approx \frac{T_1 g \alpha d^3 \tau}{\nu d^2} \approx \frac{\beta g \alpha d^4}{\nu D} .$$

C'est donc ce nombre qui va caractériser le démarrage de la convection.

Il est nul lorsque $T_1 = 0$ et d'autant plus important que le terme moteur ($-\alpha\theta\vec{g}$) dans l'équation de la dynamique est grand. En régime de convection thermique naturelle pure, $R_a \gg 1$.

Résolution

30) En appliquant le rotationnel à chaque membre de l'équation 4, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} \right) &= \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t^*} = -\underbrace{\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} p^*}_0 + R_a P_r \overline{\text{rot}} \overline{\theta^*} \vec{u}_z + P_r \overline{\text{rot}} \overline{\Delta} \vec{v}^* \\ \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t^*} &= R_a P_r \overline{\text{grad}} \overline{\theta^*} \wedge \vec{u}_z + P_r \overline{\text{rot}} \overline{\Delta} \vec{v}^* \end{aligned}$$

De plus en considérant que $\text{div } \vec{v}^* = 0$ et $\text{div } \vec{\Omega} = \text{div } \overline{\text{rot}} \vec{v}^* = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{v}^* &= \overline{\text{grad}} \text{div } \vec{v}^* - \overline{\Delta} \vec{v}^* = -\overline{\Delta} \vec{v}^* \\ \Rightarrow \overline{\text{rot}} \vec{\Omega} &= -\overline{\Delta} \vec{v}^* \\ \Rightarrow \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \vec{\Omega} &= \overline{\text{grad}} \text{div } \vec{\Omega} - \overline{\Delta} \vec{\Omega} = -\overline{\Delta} \vec{\Omega} = -\overline{\text{rot}} \overline{\Delta} \vec{v}^* \end{aligned}$$

Et finalement :
$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t^*} = R_a P_r \overline{\text{grad}} \overline{\theta^*} \wedge \vec{u}_z + P_r \overline{\Delta} \vec{\Omega} \text{ (équation 6)}$$

En appliquant le rotationnel aux deux membres de l'équation 6, il vient :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \overline{\Delta} \vec{v}^*}{\partial t^*} &= R_a P_r \overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} \overline{\theta^*} \wedge \vec{u}_z + P_r \overline{\text{rot}} \overline{\Delta} \vec{\Omega} \\ &= R_a P_r \left(-\vec{u}_z \Delta\theta^* + \overline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z} \right) \right) + P_r \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \overline{\Delta} \vec{v}^* \\ \frac{\partial \overline{\Delta} \vec{v}^*}{\partial t^*} &= R_a P_r \left(\Delta\theta^* \vec{u}_z - \overline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z} \right) \right) + P_r \overline{\Delta} \overline{\Delta} \vec{v}^* \end{aligned}$$

31) En projection sur \vec{u}_z , l'équation 7 devient :

$$\frac{\partial \Delta v_z^*}{\partial t^*} = R_a P_r \left(\Delta \theta^* - \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial z^{*2}} \right) + P_r \Delta \Delta v_z^* \quad \text{équation 8 .}$$

Recherche des modes propres

32) La partie réelle de σ représente l'inverse d'une durée caractéristique d'amortissement $\sigma' < 0$ ou d'amplification $\sigma' > 0$ et sa partie imaginaire, la pseudo pulsation.

Pour $\sigma = 0$ on observe un régime stationnaire, pour $\sigma' > 0$, une réponse instable et $\sigma' < 0$ une relaxation stable.

33) En régime permanent :

$$\begin{cases} R_a \left(\Delta \theta^* - \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial z^{*2}} \right) + \Delta \Delta v_z^* = 0 & 8 \\ \Delta \theta^* + v_z^* = 0 & 5 \end{cases}$$

34) En injectant les solutions proposées dans le système il vient :

$$\begin{cases} R_a \left(\Delta \theta^* - \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial z^{*2}} \right) + \Delta \Delta v_z^* = 0 \\ \Delta \theta^* + v_z^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Theta_0 R_a q^2 - a^2 - q^2 + \Psi_0 q^2 - a^2 = 0 \\ \Theta_0 q^2 - a^2 + \Psi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^2 R_a \Theta_0 + q^2 - a^2 \Psi_0 = 0 \\ q^2 - a^2 \Theta_0 + \Psi_0 = 0 \end{cases}$$

L'existence de solutions non nulles en Ψ_0, Θ_0 nécessite que le déterminant du système ci-dessus soit nul, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} -a^2 R_a & q^2 - a^2 \\ q^2 - a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a^2 R_a = q^2 - a^2 \quad \text{équation 9}$$

35) En $z^* = 0$ et $z^* = 1$, la présence d'un plan rigide impose $v_z^* = 0$. Ces plans conducteurs sont à la température d'équilibre donc $\theta^* = 0$.

Par ailleurs, l'incompressibilité impose $div \vec{v}^* = 0 = \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*}$ et le contact entre le plan solide et le

fluide impose $z^* = \begin{cases} 0, \forall x, y, v_x^* = 0 \\ 1, \forall x, y, v_y^* = 0 \end{cases}$ et $v_z^* = 0$. Ainsi, sur ces plans, la composante v_z^*

étant indépendante de x et y , on a $\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0$ donc $\frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0$.

36) Application numérique :

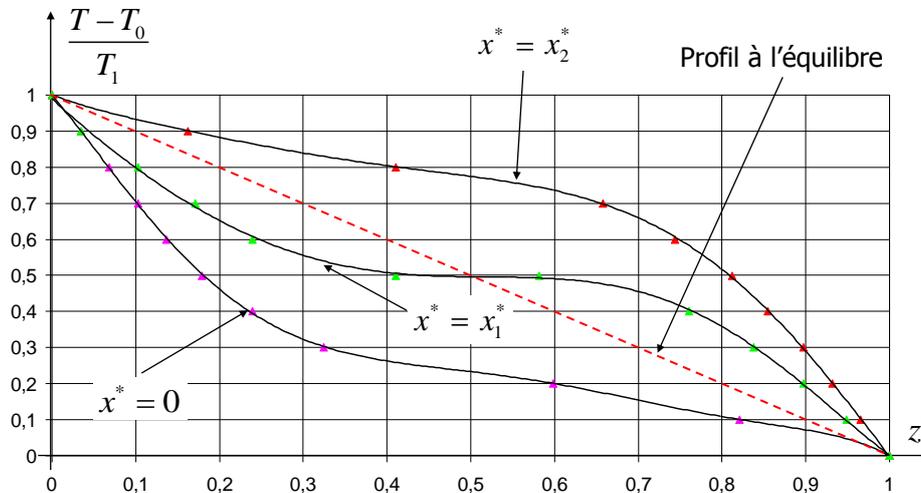
$$\frac{g \alpha T_1^c d^3}{D \mu} \approx 1707,7 \Rightarrow T_1^c = \frac{1707,7 \times 10^{-7} \times 10^{-4}}{9,8 \times 10^{-3} \times 10^{-6}} \approx \frac{1707,7}{9,8} 10^{-2} \approx 1,74 \text{ K.}$$

Analyse des résultats

37) Il y a 10 isothermes donc l'écart de température entre chaque isotherme est en variable réduite de 0,1 et en variable non réduite $T_1 / 10$.

Pour $x^* = x_1^*$, les lignes de courant sont horizontales donc $v_z^* = 0$.

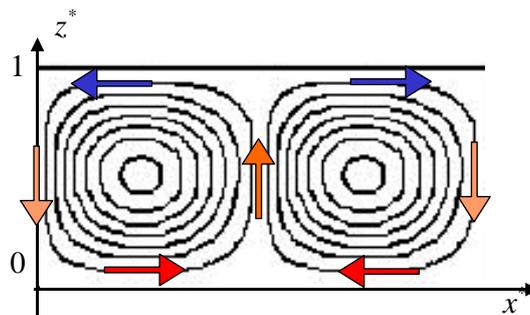
Le profil de température est assez proche de celui à l'équilibre. Le gradient vertical de température aux centres des rouleaux est nul ($x^* = x_1^*$).



Le signe de v_z^* est lié au profil de température par la relation $\Delta\theta^* + v_z^* = 0$. Le signe de $\Delta\theta^*$ est donné par la concavité de la courbe $\theta^* z^*$. En $x^* = 0$, le profil de température montre que $\Delta\theta^* > 0$ et donc $v_z^* < 0$. De même, le point d'inflexion permet de conclure que pour $x^* = x_1^*$ et $z^* = \frac{1}{2}$ alors $v_z^* = 0$. Enfin, $x^* = x_2^*$, le profil de température montre que $\Delta\theta^* < 0$ et donc $v_z^* > 0$.

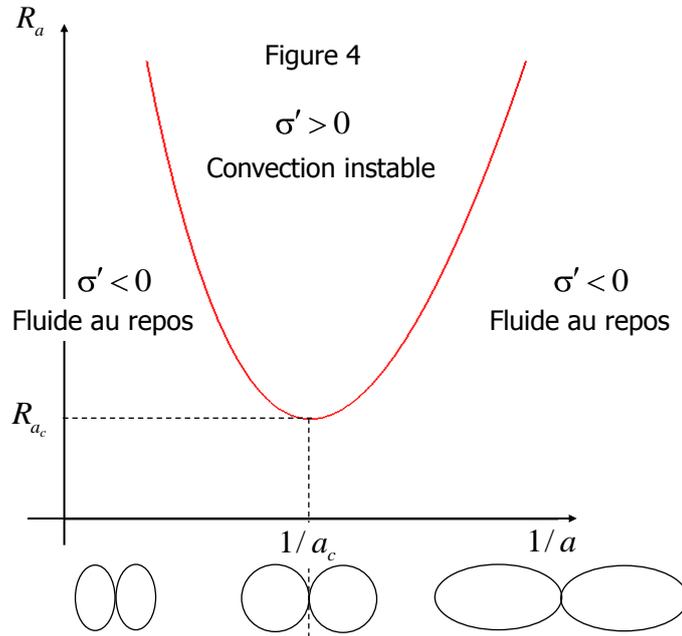
On peut aussi procéder à une analyse qualitative. Considérons le moment où la particule de fluide est au sommet du rouleau dont le centre est x_1^* , en une altitude réduite voisine de 1. Sa température est alors minimale, voisine de T_0 et sa vitesse est horizontale. Afin de déterminer son sens de déplacement, observons les profils de température pour $x^* = 0$ et $x^* = x_1^*$. Par convection, elle va légèrement refroidir la zone où elle va se déplacer. Les courbes ci-dessus montrent que le fluide froid descend en $x^* = 0$ et le chaud monte en $x^* = x_2^*$.

On obtient pour ce rouleau une rotation dans le sens anti horaire. Les sens de rotation de deux rouleaux consécutifs sont opposés.



38) a- La fonction $f(x, y)$ qui dans ce cas ne dépend que de x (le problème étant invariant par translation selon Oy) est solution de l'équation harmonique $\frac{d^2 f}{dx^2} + a^2 f = 0$. La période spatiale des rouleaux selon x^* est donc $a = \frac{2\pi}{\lambda^*} \Rightarrow \lambda^* = \frac{2\pi}{a}$.

b- Pour $a > a_c$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{a_c} \Rightarrow \lambda < \lambda_c$, les rouleaux sont plus étroits. Les réponses sont rassemblées sur la figure.



c- Plus le nombre de Rayleigh est élevé plus le terme moteur de la thermoconvection est important, cela correspond donc à une convection non stable. Par contre, lorsque le nombre de Rayleigh est nul, le fluide est au repos. La zone où le nombre Rayleigh est inférieur au nombre critique correspond à un état de repos obtenu après un régime transitoire de relaxation stable. La zone correspondant à une convection permanente est formée des points de la courbe de la figure 4.

d- En dehors de la courbe, soit $\sigma' > 0$, ce qui correspond à une convection instable, non permanente, soit $\sigma' < 0$ et on observe alors une relaxation stable pour atteindre l'état de repos.

39) L'étude associée au cas $\sigma' > 0$ nécessite de prendre en compte l'importance de la convection. On ne peut plus dans ce cas linéariser les équations.

Deuxième partie : Etude d'une bifurcation

Modèle ponctuel d'un mobile

40) Isaac Newton (1642-1727)

L'œuvre majeure de Newton est le "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" paru en 1687, correspondant au sommet de la pensée newtonienne. Les "*Principia*" marquent les débuts de la mathématisation de la physique. Ils comportent entre autres, tous les fondements principaux de la mécanique classique : égalité de l'action et de la réaction, principe d'inertie, et surtout la loi de la gravitation universelle : deux corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

41) Dans tout le problème, le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

- a)** Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la loi fondamentale de la dynamique est applicable.
b) On peut citer l'expérience du Pendule de Foucault ou la déviation vers l'Est lors de la chute libre.

42) Le cerceau est en rotation autour de l'axe fixe O, \vec{u}_z par rapport au référentiel terrestre, son vecteur rotation est donc $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. Ainsi, le référentiel \mathcal{R}_e lié à \mathcal{C} qui possède le même vecteur rotation par rapport au référentiel terrestre, n'est pas galiléen.

43) La liaison est bilatérale car le point ne peut pas quitter son support, elle est réalisée de telle sorte que le point est astreint à se déplacer sur le cerceau (exemple : une perle enfilée dans un cerceau de fil rigide métallique).

La puissance exercée par l'action de liaison sur le point vaut $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}$ où \vec{v} désigne la vitesse du point par rapport à \mathcal{R}_e . La liaison bilatérale impose que $\vec{v} = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc $\mathcal{P} = R_\theta a \dot{\theta}$. Cette puissance reste nulle pour tout type de mouvement à la condition $R_\theta = 0$.

Equation du mouvement

44) a- Le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen fait intervenir les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$m \vec{\gamma}_{\mathcal{R}_e} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}.$$

\vec{F} est la résultante des actions extérieures, $\vec{f}_{ie} = -m \vec{\gamma}_e$ est la force d'inertie d'entraînement, $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement, $\vec{f}_{ic} = -m \vec{\gamma}_c$ est la force d'inertie de Coriolis.

b- Le point coïncident est le point fixe dans le référentiel relatif (appartenant au solide relatif) qui est à l'instant considéré comme occupé par le mobile.

Son accélération, égale à l'accélération d'entraînement, est donc celle du point du solide relatif par rapport au référentiel d'étude.

c-
$$\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -m \vec{\gamma}_c.$$

45) Pour le cas présent, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \vec{\gamma}_{\mathcal{R}_e} = m \vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

- $\vec{f}_{ie} = m a \sin \theta \omega^2 \vec{u} = m a \sin \theta \omega^2 \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$ représente la force centrifuge, et s'obtient en prenant l'opposé de l'accélération du point coïncident appartenant au référentiel (lié au cerceau) en rotation circulaire uniforme autour de l'axe Oz , à la vitesse angulaire ω et à la distance $a \sin \theta$ de l'axe.

- La force d'inertie de Coriolis vaut $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_e} = -2m \omega \vec{u}_z \wedge a \dot{\theta} \vec{u}_\theta = 2ma \omega \dot{\theta} \cos \theta \vec{k}$.

- L'accélération relative du point se déduit de son mouvement circulaire :

$$\vec{v} = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma} = -a \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + a \ddot{\theta} \vec{u}_\theta .$$

- Pour finir, le poids se projette selon $m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$.

Il vient :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R_r + 0 + ma \sin^2 \theta \omega^2 + mg \cos \theta \\ ma\ddot{\theta} = 0 + 0 + ma \sin \theta \cos \theta \omega^2 - mg \sin \theta \\ 0 = R_k + 2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta + 0 + 0 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \sin \theta \cos \theta \omega^2 - \frac{g}{a} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= -\omega_0^2 \sin \theta \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta \right) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= -\omega_0^2 \sin \theta (1 - \alpha \cos \theta) \quad 10 \end{aligned}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$ représente la pulsation des petites oscillations du pendule simple de longueur a .

46) La composante $R_k = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta$ agit sur le point et donc, d'après le principe de l'action et de la réaction, lorsque le point est en mouvement, son action sur le support exerce un couple $R_k a \sin \theta \vec{u}_z$, non nul et non constant qui influe sur la vitesse de rotation du cerceau. Il faut donc réguler la vitesse de rotation afin qu'elle reste constante.

47) La variation de l'énergie cinétique du point est égale à la somme des travaux des actions qu'il subit, les deux grandeurs étant évaluées dans le référentiel d'étude, soit \mathcal{R}_e : $\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = W_{\text{Poids}} + W_{\text{fie}}$

Ici, toutes les actions qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle, donc le système est conservatif :

$$W_{\text{Poids}} = m g a (\cos \theta - \cos \theta_0) = -\Delta E_{p\text{Poids}} \quad \text{et} \quad W_{\text{fie}} = \frac{m \omega^2 a^2}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) = -\Delta E_{\text{pie}} .$$

L'intégrale première du mouvement s'écrit :

$$\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = m g a (\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{m \omega^2 a^2}{2} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0)$$

$$\text{Soit :} \quad \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = \omega_0^2 \left[2 \cos \theta - \cos \theta_0 + \alpha \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \right] \quad 11$$

Cette équation se déduit de l'équation 10. En effet, le théorème de l'énergie cinétique est, en mécanique du point, contenu dans la loi de la résultante dynamique.

Etude des positions d'équilibre et mouvement autour de ces positions

48) Les états d'équilibre relatifs sont tels que l'accélération relative est nulle :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta (1 - \alpha \cos \theta) = 0$$

Premier cas :

Si $\alpha < 1$, il existe que deux positions d'équilibres $\theta = 0 + 2\pi$ et $\theta = \pi + 2\pi$

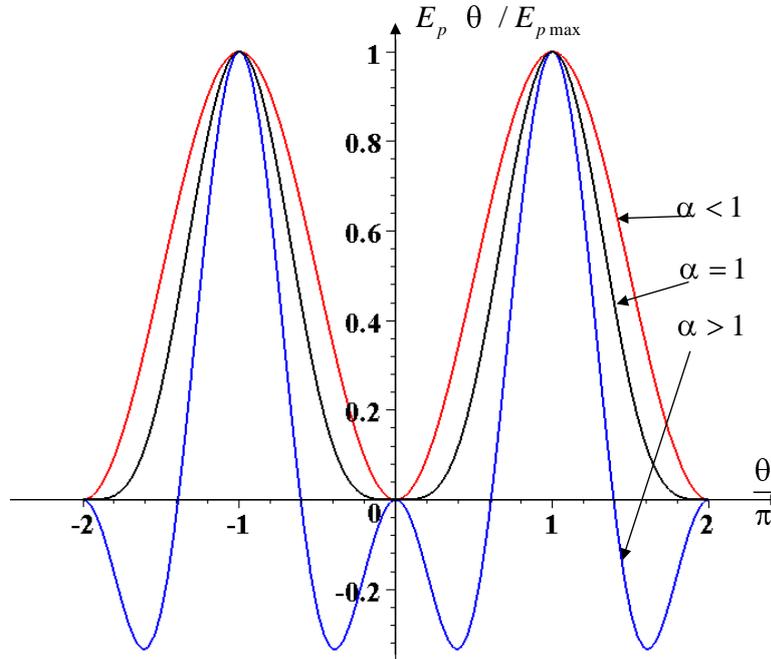
Si $\alpha \geq 1$, des positions supplémentaires apparaissent : $\cos \theta_e = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \theta_e = \pm \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2\pi$.

La valeur limite α_c de α est donc $\alpha_c = 1$.

49) a- L'énergie potentielle vaut :

$$E_p(\theta) = -mga \cos \theta - 1 - \frac{ma^2\omega^2}{2} (1 - \cos^2 \theta) = ma^2\omega_0^2 \left(1 - \cos \theta - \frac{\alpha}{2} (1 - \cos^2 \theta) \right)$$

b- Les trois courbes sont tracées pour $\alpha = 1$, $\alpha = 0,1$ et $\alpha = 3$:



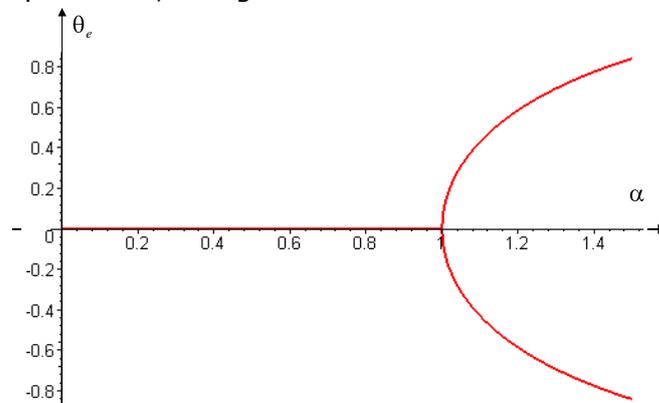
c- Etude de cas :

Les minima d'énergie potentielle sont associés aux positions d'équilibre stables et les maxima à celles instables. On déduit donc :

- Lorsque $\alpha < 1$ (courbe rouge), la position $\theta_e = 0$ et 2π est stable et $\theta_e = \pi$ est instable.
- Lorsque $\alpha = \alpha_c = 1$ (courbe noire), on est dans la même situation que $\alpha < 1$.
- Lorsque $\alpha > 1$ (courbe bleue), $\theta_e = \pi$ reste instable, $\theta_e = 0$ et 2π deviennent instables et apparaissent deux nouvelles positions d'équilibre stables telles que $\cos \theta_e = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \theta_e = \pm \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right) 2\pi$.

deux nouvelles positions d'équilibre stables telles que $\cos \theta_e = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \theta_e = \pm \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right) 2\pi$.

50) D'après la question précédente, le diagramme de bifurcation est :



Remarque: la condition sur ω se déduit de celle sur α :

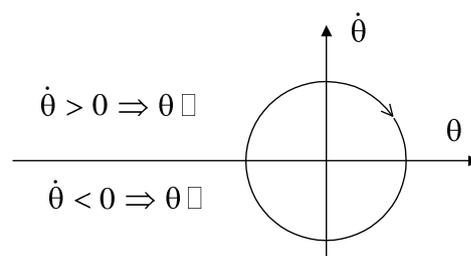
$$\alpha < \alpha_c = 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0 \text{ et } \alpha > \alpha_c \Leftrightarrow \omega > \omega_0$$

Étude de cas :

Premier cas

51) Le portrait de phase contient des variations de la vitesse angulaire en fonction de θ pour diverses conditions initiales.

a) Lorsque le temps augmente, le sens de variation de θ est donné par le signe de $\dot{\theta}$: si $\dot{\theta} > 0$, alors θ est croissant. Ainsi, les trajectoires de phase sont orientées dans le sens horaire (trigonométrique négatif).

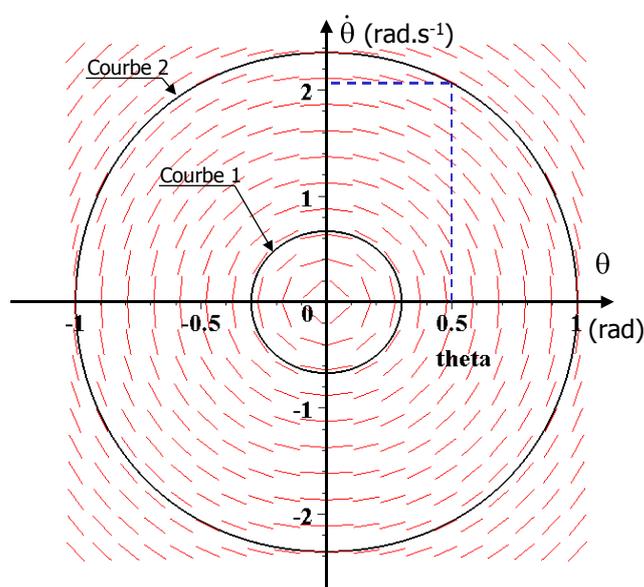


b) Les trajectoires de phases sont fermées lorsque le mouvement est périodique.

c) Le système étant conservatif, l'énergie mécanique se conserve et reste donc identique en tous points d'une trajectoire de phase.

52) a- Les trajectoires de phase font apparaître des oscillations autour de la position d'équilibre $\theta_e = 0$ qui est dans ce cas stable, ce qui correspond à $\alpha < 1$, seul cas où la position $\theta_e = 0$ est stable.

b- Pour la courbe 1, la vitesse initiale est nulle et l'angle initial $\theta_0 \approx 0,3$ rad. Pour la courbe 2, l'amplitude correspondant aux points de vitesse angulaire nulle est $\theta_{\max} \approx 1$ rad. Les deux trajectoires demandées sont donc :



c- Pour la courbe 1, $\theta_{\text{initial}} \approx 0,3$ rad et $\dot{\theta}_{\text{initial}} \approx 0$ rad.s⁻¹.

Pour la courbe 2, la vitesse initiale se lit sur la trajectoire de phase en considérant le point de la trajectoire dont l'abscisse est $\theta_{2\text{initial}} \approx 0,5$ rad, soit $\dot{\theta}_{2\text{initial}} \approx 2,1$ rad.s⁻¹.

Les périodes des deux oscillations ne sont pas identiques.

d- Un oscillateur isochrone présente une période d'oscillation indépendante des conditions initiales.

53) Les oscillations isochrones sont celles de faible amplitude au voisinage de $\theta_e = 0$. Dans ces conditions, la forme approchée de l'équation différentielle est à l'ordre le plus bas en θ au voisinage de $\theta_e = 0$:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad 1 - \alpha \cos \theta \approx -\omega_0^2 \theta \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right) \approx -\omega_0^2 (1 - \alpha) \theta.$$

Les oscillations isochrones ont donc pour période : $T_i = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha}}$.

On lit sur la courbe 1 : $T_i \approx 2,8 \text{ s} \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 T_i^2} = 1 - \frac{a4\pi^2}{gT_i^2} \approx 0,5$.

On suppose pour l'instant que l'amplitude des oscillations est suffisamment faible pour que θ soit solution de l'équation linéarisée.

54) La lecture graphique de la période sur la courbe 2 est : $T_2 \approx 2,6 \text{ s}$. Les oscillations de la courbe 2 ne sont plus dans le cadre des oscillations isochrones.

La période se calcule grâce à l'intégrale première du mouvement :

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta - \cos \theta_0 + \alpha \omega_0^2 \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \quad 11$$

qui pour une vitesse initiale nulle se simplifie selon :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta - \cos \theta_0 + \alpha \omega_0^2 \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \geq 0.$$

Ainsi, pour toutes valeurs de $\theta < \theta_0$ on peut écrire :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - \cos \theta_0 + \alpha \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta}} = \omega_0 dt$$

Lorsque θ croît de 0 à θ_0 , le temps augmente de $T/4$. La période vérifie donc :

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - \cos \theta_0 + \alpha \cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta}} = \omega_0 \frac{T}{4}$$

En posant $u = \cos \theta$ et $u_0 = \cos \theta_0$, alors $du = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-u^2} d\theta$ et l'intégrale devient :

$$\int_1^{u_0} \frac{-du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{2u - u_0 + \alpha u_0^2 - u^2}} = \int_{u_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{2u - u_0 + \alpha u_0 + u - u_0}} = \frac{2\pi T}{T_0 4}$$

Soit :

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \int_{u_0}^1 \frac{du}{\sqrt{u - u_0} \sqrt{1 - u^2} \sqrt{2 - \alpha u_0 + u}}$$

55) a- Pour $\alpha = 1/2$, le résultat de la question précédente s'écrit :

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \int_{u_0}^1 \frac{du}{\sqrt{u - u_0} \sqrt{1 - u^2} \left(2 - \frac{1}{2} u_0 + u \right)} = \frac{2I}{\pi} T_0.$$

b- L'énergie potentielle étant une fonction paire de θ , la période est la même pour les deux angles initiaux θ_0 et $-\theta_0$. Ce qui justifie la parité des variations de I avec θ_0 .

c- Pour $\theta_0 = 0$ on est dans le cas des oscillations isochrones (on constate que I est peu sensible aux variations de θ_0).

d- Pour la courbe 1, $\theta_0 \approx 0,3 \text{ rad}$ et on lit $I \approx 2,22$, soit $T_1 = \frac{2I}{\pi} T_0 \approx \frac{2 \times 2,22}{\pi} T_0 \approx 2,8 \text{ s}$.

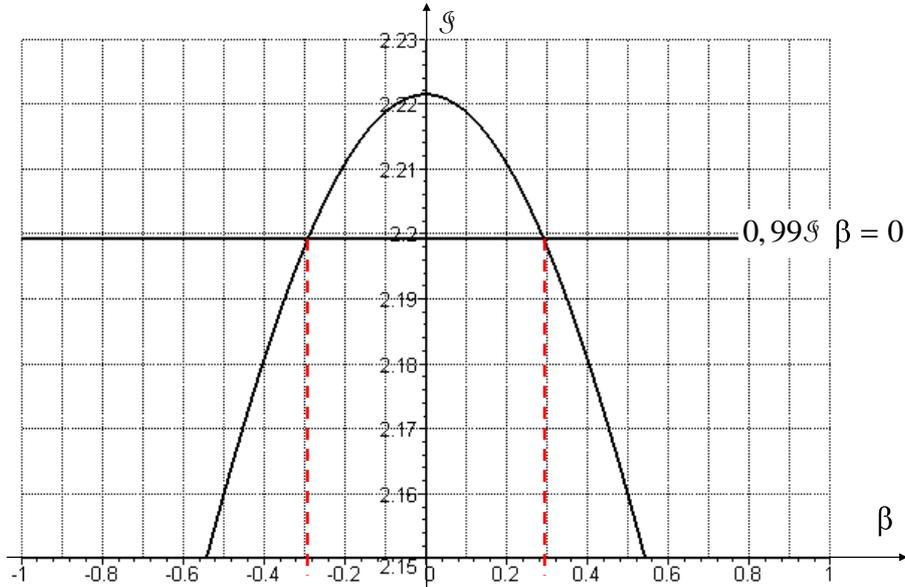
Pour la courbe 2, $\theta_0 = 1 \text{ rad}$, on lit $I \approx 2,04$, soit $T_2 = \frac{2I}{\pi} T_0 \approx \frac{2 \times 2,04}{\pi} T_0 \approx 2,6 \text{ s}$.

On retrouve bien les périodes mesurées sur les chronogrammes.

56) La variation relative de la période est identique à la variation relative de I :

$$\frac{I \theta_0 - I_0}{I_0} = \frac{T \theta_0 - T_i}{T_i}$$

Pour que l'écart reste inférieur à 1 %, il faut que : $\frac{I \theta_0 - I_0}{I_0} < 0,01 \Rightarrow I \theta_0 > 0,99 I_0 \approx 2,2$

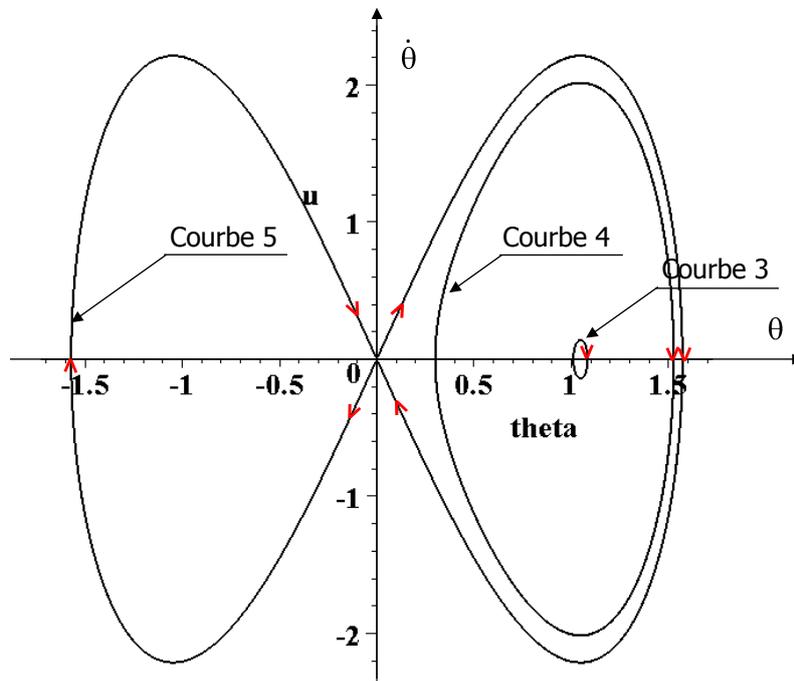


On observe graphiquement que l'amplitude des oscillations ne doit pas excéder 0,3 rad ce qui correspond au cas de la courbe 1. La valeur lue pour la période sur la courbe 1 correspond à celle des oscillations isochrones à 1 % près.

Second cas

57) a- On observe des oscillations stables autour de $\theta_e \neq 0$, ce qui correspond au cas $\alpha > 1$.

b- Les conditions initiales explicitées au **c-** permettent l'identification qui suit. L'orientation selon la convention de la question 51, correspond à un sens de rotation dans le sens horaire.



c- Les trajectoires sont orientées en rouge. Les conditions initiales sont :

Courbe 3 : $\theta_0 \approx 1 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$

Courbe 4 : $\theta_0 \approx 0,3 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$

Courbe 5 : $\theta_0 \approx 0 \text{ rad}$ et $\dot{\theta}_0 = 0^+ \text{ rad.s}^{-1}$

d- La courbe 3 montre que $\theta_e \approx 1,05 \text{ rad}$ et donc d'après la question 48, $\alpha \approx 1/\cos 1,05 \approx 2$.

58) a- La courbe 3, dont la trajectoire de phase reste au voisinage de la position d'équilibre $\theta_e = \pi/3$, correspond à des oscillations isochrones. Les deux autres ont une période dépendant des conditions initiales.

b- Pour $\theta \approx \theta_e$, l'équation du mouvement prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta (1 - \alpha \cos \theta) \\ \sin \theta \approx \sin \theta_e + \cos \theta_e (\theta - \theta_e) \Rightarrow \\ \cos \theta \approx \cos \theta_e - \sin \theta_e (\theta - \theta_e) \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} \approx -\omega_0^2 [\sin \theta_e + \cos \theta_e (\theta - \theta_e)] [1 - \alpha \cos \theta_e - \sin \theta_e (\theta - \theta_e)]$$

Par ailleurs, θ_e étant la position d'équilibre non nulle, $1 - \alpha \cos \theta_e = 0$ et $\sin \theta_e = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}}$. Il vient donc à l'ordre le plus bas :

$$\ddot{\theta} \approx -\alpha \omega_0^2 \sin^2 \theta_e (\theta - \theta_e) \approx -\omega_0^2 \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} (\theta - \theta_e)$$

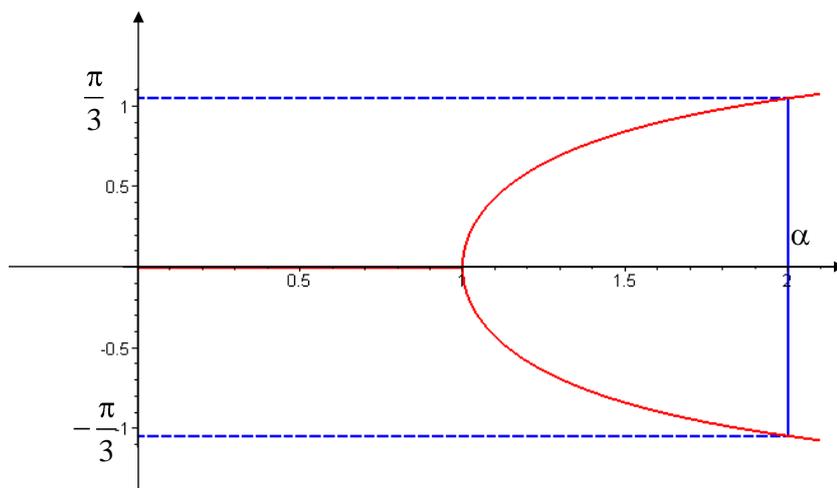
La période des oscillations isochrones est donc :

$$\frac{2\pi}{T'_i} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}} \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T'_i = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}} T_0 \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \times 2 \approx 1,64 \text{ s}$$

c- Cette valeur correspond à la période de la courbe 3. La courbe 4 a une période plus grande. L'amplitude des oscillations autour de θ_e est trop importante pour pouvoir linéariser les équations.

59) On étudie maintenant le portrait de phase.

a) Lorsque le paramètre α prend la valeur $\alpha = 2$, il apparaît deux positions d'équilibre stables $\theta_e = \pm \frac{\pi}{3}$ et la position $\theta_e = 0$ est instable :



b) La position $\theta_e = 0$ est une position d'équilibre instable. La courbe 5 correspond à des oscillations autour de cette position mais elles ne peuvent pas être sinusoïdales. Les trajectoires de phase se coupent en ce point, et celles voisines de ce point n'ont pas la forme d'ellipses centrées sur ce point.

c) Il existe des oscillations périodiques autour de la position d'équilibre instable (exemple courbe 5)

d) La forme du portrait de phase au voisinage de la position d'équilibre instable n'est pas une ellipse. Les oscillations ne sont donc pas harmoniques

e) Courbe 3 :

Les oscillations sont sinusoïdales, le spectre contient uniquement la fréquence $f = 2\pi\omega_0 \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}}$

Courbe 4 :

L'amplitude des oscillations est plus importante. Elles sont périodiques mais non harmoniques ; le spectre de la fonction $\theta_4(t)$ est donc plus riche que celui de $\theta_3(t)$. Il contient en plus du fondamental (inverse de la période qui est différente de T_1'), des harmoniques de fréquences multiples de celle du fondamental. L'effet de non linéarité est encore faible donc les harmoniques présenteront une amplitude faible devant le fondamental.

Courbe 5 :

Le spectre de la fonction périodique $\theta_5(t)$ présente des harmoniques d'amplitude importante.

60) Pour la courbe 5, l'énergie mécanique est nulle (limite par valeur supérieure).

Pour les courbes 3 et 4 :

En prenant $\alpha = 2$ et un point de la trajectoire de phase tel que $\dot{\theta} = 0$, E_m s'identifie à E_p . Or :

$$E_p(\theta) = ma^2\omega_0^2 \left(1 - \cos \theta - \frac{\alpha}{2} (1 - \cos^2 \theta) \right) = ma^2\omega_0^2 (1 - \cos \theta - 1 + \cos^2 \theta)$$

Pour la courbe 4, $\theta_0 = 0,3$ rad, donc $E_m = mga (1 - \cos \theta_0 - 1 + \cos^2 \theta_0) \approx -0,42$ J.

Pour la courbe 3, $\theta_0 = 1$ rad, donc $E_m \approx -2,43$ J.

Lorsque l'énergie mécanique passe de $E_m = 0^-$ à $E_m = 0^+$, la période double.
Grande sensibilité aux conditions initiales au voisinage de ce point.

61) La position d'équilibre est solution de l'équation $\theta_e = \arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. En faisant un développement limité de cette fonction au voisinage de $\alpha = 1$, on obtient $\theta_e \approx \sqrt{2}\sqrt{\alpha-1} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}$.

Exemple : aimantation spontanée à l'équilibre d'un corps ferromagnétique $M = cte\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}$ au voisinage du point critique de la transition paramagnétique/ferromagnétique étudiée à l'aide de la théorie de Landau.

62)

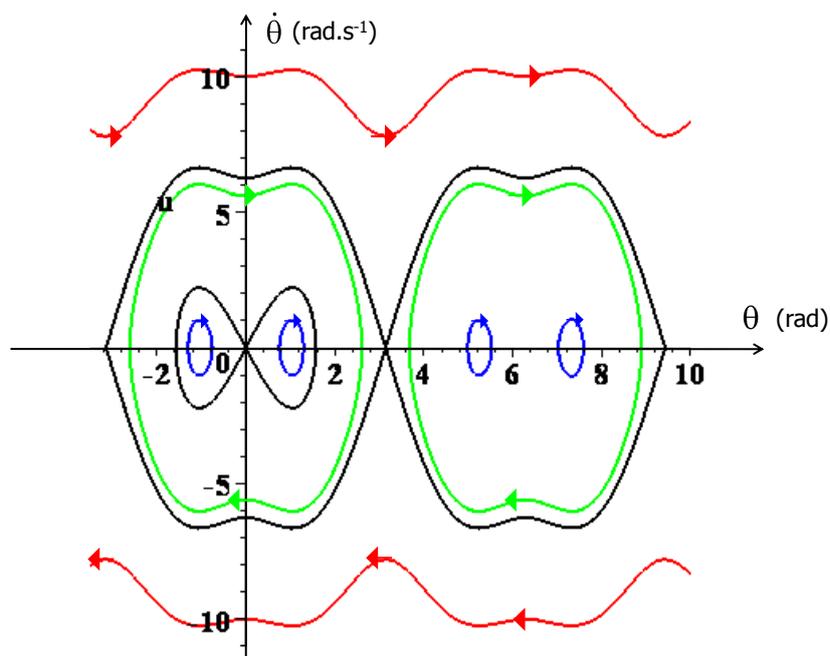
a) Pour $\alpha = 2$:

Si $E_m > E_p$, $\pi = E_2 = 2mga \approx 19,6 \text{ J}$, le mouvement n'est plus périodique, l'angle θ ne cesse de croître ou décroître selon les conditions initiales (aucun point n'a de vitesse nulle sur le portrait de phase).

Si $E_p > E_m > E_1$, on observe des oscillations non harmoniques autour de 0.

Si $E_m < 0$, le système oscille autour de $\pm\theta_e = \mp\frac{\pi}{3}$ selon les conditions initiales.

b) Les trajectoires sont sur le diagramme qui suit.



Les courbes en noir représentent les cas limites $E = 0$ et $E = E_2$.

Pour $E < 0$, on observe les trajectoires bleues, qui correspondent à des oscillations autour de $\pm\theta_e = \mp\frac{\pi}{3}$ modulo 2π .

Pour $E_2 > E > 0$, on observe les trajectoires vertes qui correspondent à des oscillations autour de 0 modulo 2π .

Pour $E > E_2$, on observe les trajectoires rouges. La vitesse angulaire garde un signe constant, le point ne cesse de tourner.

c) Dans ce cas, l'énergie cinétique devient infiniment grande devant l'énergie potentielle et donc $E_m \approx E_c \approx cte \Rightarrow \dot{\theta} \approx cte$. Les trajectoires de phase deviennent alors des droites.

63) Les courbes sont représentées à la suite.

Lorsque $E_m = E_2^-$, le mouvement est oscillatoire autour de 0 modulo 2π . Le sens de rotation s'alterne chaque demi-période. Par contre, lorsque $E_m = E_2^+$, le mouvement est différent, le sens de rotation est toujours constant et dépend des conditions initiales. On peut donc distinguer ces deux situations.

