

Correction de la composition de physique. Agrégation externe de sciences physiques option physique, session 2012.

I) Analyse préliminaire.

A - Le concept de particule de fluide.

1) Une particule de fluide est un élément de fluide de volume $d\tau = d^3$, de taille caractéristique d , très petite devant les échelles de longueur caractéristique L de l'écoulement (largeur d'un canal, taille d'un obstacle...), très grande devant le libre parcours moyen L^* des molécules.

Typiquement : $10 \text{ nm} \ll d \ll 1 \text{ m}$, soit $d \approx 1 \mu\text{m}$

2) - Points de vue eulérien : l'écoulement est décrit par des champs scalaires ou vectoriels comme le champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$ donnant la valeur des grandeurs physiques en un point fixe M de l'écoulement, en fonction du temps. Les instruments de mesure associés sont fixes dans le référentiel d'étude.

- Points de vue lagrangien : les grandeurs physiques sont celles d'une particule de fluide que l'on suit le long de sa trajectoire. Les instruments de mesure sont embarqués et suivent l'écoulement.

3) - lignes de courant (outil eulérien) : courbe tangente, en tout point M , au champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$ et orientée par la vitesse.

- trajectoire particulaire (outil lagrangien) : trajectoire d'une particule de fluide donné.

- ligne d'émission (ni lagrangien, ni eulérien) : ensemble des positions d'une particule de fluide ayant coïncidé à un instant antérieur avec un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

A l'aide d'un appareil photographique à temps de pose réglable, on peut placer des traceurs dans le fluide et exposer ces traceurs :

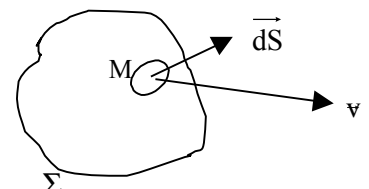
- de façon prolongée (temps de pose long) pour suivre la trajectoire d'un traceur donné.
- de façon très brève (pour suivre le déplacement élémentaire entre deux instants très voisins $d\vec{\ell} = \vec{v}(M, t).dt$) afin de « remonter » aux lignes de courant par échantillonnage.
- Avec un temps de long, et après avoir placé une source de colorant (dans un fluide) ou de fumée (dans l'air).

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, les lignes de courant, les lignes d'émission et trajectoires particulières sont confondus.

4) La dérivée particulaire d'un champ scalaire $f(M, t)$ s'écrit : $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})f$, pour un fluide où le champ de vitesses est $\vec{v}(M, t)$.

$\frac{D\rho}{Dt}$ est la variation de ρ durant dt en suivant la particule de fluide le long de sa trajectoire durant dt . Cette variation peut avoir deux origines : des variations au cours du temps (régime variable) dite dérivée locale, des variations spatiales associées à un champ non uniforme dite dérivée convective.

5) Soit τ un volume, dit de contrôle, délimité par une surface fermée Σ , fixe et indéformable.



On fait un bilan de masse dans ce volume, entre les instants t et $t + dt$, en l'absence de source et puits dans le volume τ : $dm_{\text{accumulée}} = - dm_{\text{sortante}}$

$$\text{Soit } \underbrace{\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt}_{\text{masse "accumulée"}} d\tau = - \underbrace{\iint_{\Sigma} (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S}}_{\text{masse "sortie"}}$$

$$\Rightarrow \forall \tau \quad \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) d\tau = 0$$

d'où *l'équation locale de conservation de la masse*: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0.$$

6) L'écoulement incompressible si la masse volumique d'une particule de fluide n'évolue pas au cours de son mouvement soit : $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$ d'après la question précédente.

B - Notions de déformations dans les écoulements.

7) L'aire initiale, à l'instant t , de la particule de fluide est : $\Sigma(t) = dx.dy$.

A l'instant $t+dt$, la nouvelle aire devient : $\Sigma(t+dt) = \|\vec{A'B'} \wedge \vec{A'D'}\|$ avec

$$\vec{A'B'} = \vec{AB} + [\vec{v}(B') - \vec{v}(A')]dt = \vec{AB} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \vec{e}_y \right] dx dt \text{ avec } \vec{AB} = dx \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{A'D'} = \vec{AD} + [\vec{v}(D') - \vec{v}(A')]dt = \vec{AD} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \vec{e}_y \right] dy dt \text{ avec } \vec{AD} = dy \cdot \vec{e}_y$$

$$\text{d'où, au premier ordre en } dt : \vec{A'B'} \wedge \vec{A'D'} = dx \cdot dy \left[1 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dt \right] \vec{e}_z$$

donc $\Sigma(t+dt) = dx \cdot dy \left[1 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dt \right]$ avec $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{1}{\Sigma} \cdot \frac{d\Sigma}{dt}$ la variation relative d'une aire élémentaire, ou taux de dilatation de la particule de fluide bidimensionnelle.

A trois dimensions on retrouve : $\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}$, c'est-à-dire l'interprétation de la divergence

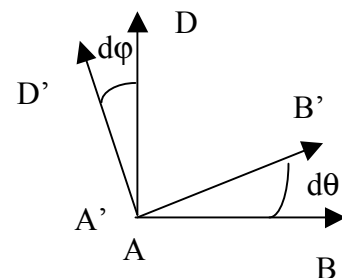
du champ de vitesse comme le taux de dilatation (τ , volume de la particule de fluide) de la particule de fluide tridimensionnelle.

8) Avec la figure en ramenant A' confondu avec A , il vient aisément :

$$d\theta \approx \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dt dx}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \text{ et } d\varphi \approx \frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y} dt dy}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

donc la diagonale du rectangle tourne d'un angle : $d\alpha = \Omega dt = \frac{1}{2}(d\theta + d\varphi)$

$$\text{soit } \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$



A trois dimensions on trouve l'expression du vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\omega}$

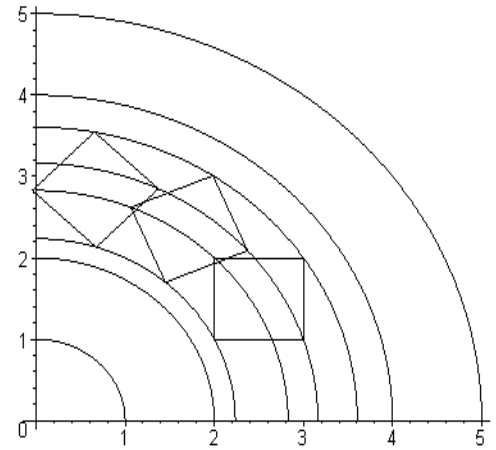
9) (a) $\vec{v} = -a y \vec{e}_x + a x \vec{e}_y = a r \vec{e}_\theta$;

$div(\vec{v})=0$, écoulement incompressible,

$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=2a\vec{e}_z$, écoulement rotationnel, rotation “ en bloc” type solide avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = a\vec{e}_z$

les lignes de courant sont des cercles, d'axe Oz, orientés dans le sens direct si $a > 0$.

Il s'agit d'une rotation sans déformation (figure iii), qu'on rencontre dans un vortex de vidange ou l'œil d'une tornade.



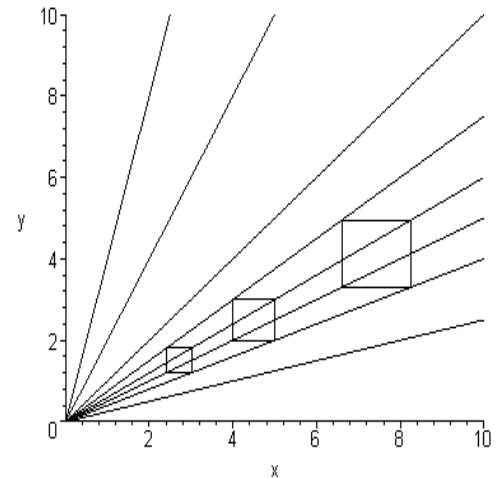
(b) $\vec{v} = a x \vec{e}_x + a y \vec{e}_y = a r \vec{e}_r$;

$div(\vec{v})=2a$, écoulement compressible,

$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=\vec{0}$, écoulement irrotationnel, potentiel

Les lignes de courants sont des droites linéaires $y=Kx$.

Il s'agit de translation avec dilatation (figure ii), comme un écoulement radial d'un gaz à grande vitesse, ou explosion isotrope d'un fluide (ou modèle d'expansion de l'univers...).



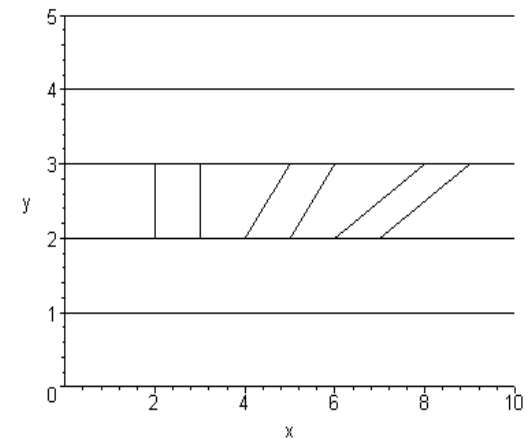
(c) $\vec{v} = -a y \vec{e}_x$;

$div(\vec{v})=0$, écoulement incompressible,

$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=a\vec{e}_z$, écoulement rotationnel

Les lignes de courants sont des droites $y=constante$.

Il s'agit d'un écoulement de cisaillement d'un fluide newtonien de type Couette plan (figure iv).



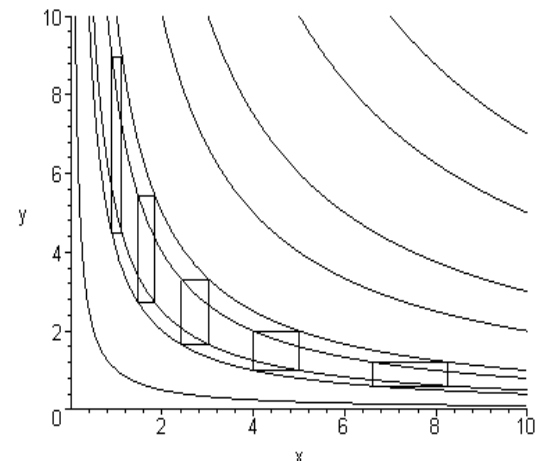
(d) $\vec{v} = -a x \vec{e}_x + a y \vec{e}_y$

$div(\vec{v})=0$, écoulement incompressible,

$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=\vec{0}$, écoulement irrotationnel, potentiel

Les lignes de courant sont des hyperboles équilatères $yx = cste$.

Il s'agit d'un écoulement d'un fluide parfait dans un dièdre droit (figure i)



C - Un exemple de dispositif de mesures de vitesse d'un écoulement.

L'anémométrie à fil chaud.

10)

a) Dans la couche limite thermique d'épaisseur δ , on peut supposer que le transfert thermique se fait uniquement par flux conducto-convectif, de type unidimensionnel axial, soit en régime permanent : $\vec{j}_Q = -\lambda_a \frac{dT}{dx} \vec{e}_z \approx \lambda_a \frac{(T_f - T_0)}{\delta} \vec{e}_z$ soit en identifiant avec la loi de Newton $h \approx \frac{\lambda_a}{\delta}$.

Rem : un calcul plus rigoureux tiendrait compte de l'expression de la résistance thermique en géométrie cylindrique : $R_{th} = \frac{\ln(1 + 2\delta/d)}{2\pi L \lambda_a}$ à identifier avec $R_{th} = \frac{1}{h\pi dL}$ avec la loi de Newton. On retrouve l'expression précédente si $2\delta \ll d$ (bien vérifié).

b) En régime permanent : $R_f I^2 = h(T_f - T_0)\pi dL \Leftrightarrow R_f I^2 = h \left(\frac{R_f - R_0}{\alpha R_0} \right) \pi dL$

donc $\frac{R_f}{R_f - R_0} I^2 = \frac{\pi dL \lambda_a}{\alpha R_0 C} \sqrt{U}$, loi de King, avec $a = \frac{\pi dL \lambda_a}{\alpha R_0 C}$

Il existe deux stratégies pour mesurer une vitesse U de fluide :

- l'anémométrie à courant constant ; il suffit de mesurer la résistance du fil, et grâce à un étalonnage, les variations de la résistance du fil permettent d'obtenir U .
- ou l'anémométrie à température constante (grâce à un asservissement) : la mesure de I donne accès à U

c) Si l'intensité du courant reste constant, avec de petites variations on peut envisager de différencier logarithmiquement la loi de King :

$$\frac{dR_f}{R_f} - \frac{dR_f}{R_f - R_0} = \frac{1}{2} \frac{dU}{U} \Leftrightarrow dT_f = -\frac{R_f}{R_0} \frac{(T_f - T_0)}{2} \frac{dU}{U} \text{ avec } dR_f = \alpha R_0 dT_f$$

donc $|\Delta T_f| = \left| \frac{R_f}{R_0} \frac{(T_f - T_0)}{2} \frac{\Delta U}{U} \right| = 16^\circ C$, très aisément mesurable.

d) En appliquant le premier principe de la thermodynamique au fil, pour une transformation élémentaire, on peut écrire :

$$\rho \pi \frac{d^2}{4} LC_{fil} \frac{dT_f}{dt} = -h(T_f - T_0)\pi dL + R_0 [1 + \alpha(T_f - T_0)] I^2$$

On a donc une constante de temps caractéristique vérifiant : $\frac{1}{\tau} = \frac{4}{\rho \pi d^2 LC_{fil}} (h\pi dL - \alpha R_0 I^2)$

AN : $\tau = 6.10^{-3} s$, soit une fréquence maximale $f_{max} = 1/\tau = 160 \text{ Hz}$.

II) Quelques éléments de la théorie de la portance.

A - Ecoulements bidimensionnels parfaits fondamentaux.

11) Généralités.

a) Un fluide est considéré comme parfait si on peut négliger les phénomènes dissipatifs ; les effets de viscosité et de diffusion thermique sont négligeables.

Les conditions aux limites vérifiées par le champ de vitesse d'un écoulement de fluide parfait à la surface d'un solide sont : $\vec{v}_{\text{fluide/solide}} \cdot \vec{n} = 0$ (non pénétration du fluide) où $\vec{n}$ est la normale à la surface.

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide élémentaire, dans un référentiel galiléen, on a : $\rho d\tau \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau + \vec{f}_v \cdot d\tau$ avec $\vec{f}_v$ densité volumique des autres efforts extérieurs.

D'où la relation d'Euler : $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \vec{f}_v$

c) Dans la base locale de Frénet, en notant s l'abscisse curviligne : $\vec{v} = v(s, t) \vec{t}$, soit

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} \vec{t} + v \frac{D\vec{t}}{Dt}, \text{ or } \frac{D\vec{t}}{Ds} = \frac{\vec{n}}{R} \text{ soit } \frac{D\vec{t}}{Dt} = \frac{v}{R} \vec{n}$$

D'où la circulation élémentaire de l'équation d'Euler projetée selon la normale, le long

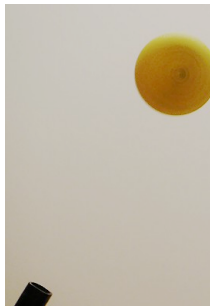
d'une trajectoire très courbée de telle sorte que $\left| \frac{v^2}{R} \right| \gg \left\| \frac{\vec{f}_v}{\rho} \right\|$ avec $d\vec{\ell} = d\ell \vec{n}$:

$$\frac{v^2}{R} d\ell = -\frac{dP}{\rho}$$

La pression diminue quand on se rapproche du centre de courbure de la trajectoire (à la base de l'effet Coanda).

Expériences illustratives :

- en plaçant une balle de ping-pong sur un jet incliné d'air, celui est défléchi par la balle assurant ainsi un effet de portance verticale permettant la lévitation de la balle.
- Lorsqu'on essaie de vider un bécier sans utiliser le rebord en forme de bec, une partie du liquide reste « collée » à la paroi ; le jet de sortie se courbe, s'écoule le long du verre et finit par goutter. On parle aussi de « l'effet théière ».



12) Ecoulements potentiels.

a) Pour un écoulement irrotationnel on a : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \varphi(M, t), \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$; si de plus l'écoulement est incompressible, le potentiel scalaire vérifie la loi de Laplace : $\Delta \varphi = 0$.

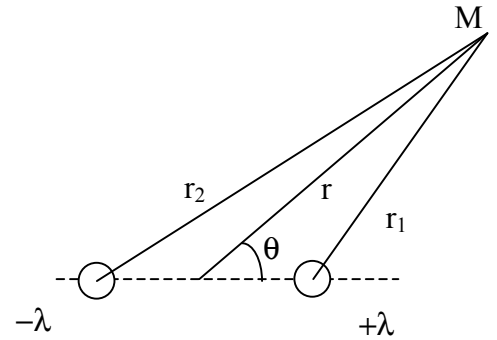
b) Dans un fluide parfait, un tourbillon ne peut pas naître, d'après le théorème de Helmholtz ; si un fluide parfait est initialement irrotationnel, il le restera tout au long de l'écoulement.

c) Avec ces hypothèses, et la décomposition de Lamb de l'accélération convective, on écrit, en présence uniquement d'un champ de pesanteur et d'un axe vertical ascendant 0z :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{constante} \text{ en tout point du fluide.}$$

d) On a vu d'après la conservation de la masse que:

$$\text{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$



Pour un écoulement parfait stationnaire à altitude quasi constante on a : $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{constante}$,

d'où $\delta P \approx \rho U^2$ en ordre de grandeur, avec U la vitesse maximale de l'écoulement.

D'autre part, pour un écoulement parfait, donc isentropique on peut définir le coefficient de

compressibilité isentropique : $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta P}$, soit

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \approx \chi_s \delta P = \rho \chi_s U^2 = \left(\frac{U}{C_{son}} \right)^2 = (Mach)^2 \text{ en introduisant le nombre sans dimension de Mach.}$$

D'où le critère « pratique » d'incompressibilité : $\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1 \Leftrightarrow U^2 \ll C_{son}^2$ pour $Re \gg 1$.

Selon les fluides :
- pour les liquides supposés incompressibles, toujours vérifié.
- pour les gaz : nécessité d'un écoulement subsonique.

13) *Écoulement uniforme.*

Pour un écoulement uniforme de vitesse $\vec{U} = U_0 \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_{\text{uniforme}})$, soit $\Phi_{\text{uniforme}} = U_0 x + cste$

14) *Écoulement dipolaire cylindrique.*

a) Pour l'écoulement potentiel on peut écrire :

$$\vec{v}_{\text{dipole}} = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_{\text{dipole}}) = \frac{\partial \Phi_{\text{dipole}}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{\text{dipole}}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\frac{p \cdot \cos \theta}{r^2} \vec{e}_r - \frac{p \cdot \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\theta$$

L'équation des lignes de courant est obtenue pour : $\vec{v}(M, t) \parallel d\vec{\ell}$

soit $\frac{dr}{v_r} = r \frac{d\theta}{v_\theta} \Leftrightarrow r = K |\sin \theta|$. Ce sont des cercles tangents à $\vec{p}$.

b) Pour un fil infini chargé linéiquement $+\lambda$, on trouve le champ électrique par le théorème de

Gauss (symétrie cylindrique) : $\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ associé au potentiel

$$V_1(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + cste.$$

Donc par superposition, pour les deux fils de charge linéique opposées :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \text{ avec } r_1 \approx r - \frac{a}{2} \cdot \cos \theta \text{ et } r_2 \approx r + \frac{a}{2} \cdot \cos \theta \text{ au}$$

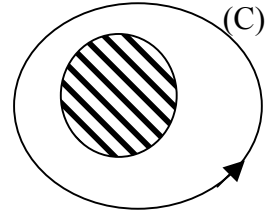
premier ordre près en a/r .

Soit $V(M) \approx \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$ avec $\vec{p}_{linéique} = \lambda a \vec{e}_x$ le moment dipolaire électrique linéique associé au système.

15) Vortex de Rankine et ligne de vorticité.

a) La circulation le long d'un contour fermé (C) entourant le cœur du vortex, s'écrit avec le théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(C)} \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \pi a^2 \omega_0 = \Gamma \text{ constante.}$$



b) Problème analogue à celui rencontré en magnétostatique avec un cylindre parcouru par une densité de courant uniforme : avec $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \omega_0 \vec{e}_z$ à l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz et $div(\vec{v}) = 0$. Par symétrie cylindrique du champ de tourbillon ou vorticité, on cherche un champ de vitesse sous la forme $\vec{v}(M) = v(r) \vec{e}_\theta$, soit en appliquant le théorème de Stokes-

Ampère le long d'un cercle de rayon $r > a$: $\oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \Gamma = 2\pi r \cdot v$ soit $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

c) Donc, hors du cœur du vortex, on peut écrire : $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$, le champ de vitesse

dérive bien d'un potentiel : $\Phi_\Gamma = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + cste$

d) Le champ de vitesse étant à flux conservatif ( coulement incompressible), il dérive bien d'un potentiel vecteur. Or $\overrightarrow{rot}(\psi(r) \vec{e}_\theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta$, donc $\psi(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) + cste$

e) L'analogie magnétostatique d'une ligne de vorticité est un fil infini de diamètre nul parcouru par un courant d'intensité I.

B - écoulement autour d'un cylindre de révolution sans circulation.

16)

a) On envisage l'écoulement obtenu par superposition d'un écoulement uniforme et d'un écoulement dipolaire soit : $\Phi = \alpha \cdot r \cdot \cos\theta + p \frac{\cos\theta}{r}$ une constante.

Donc avec les conditions aux limites :

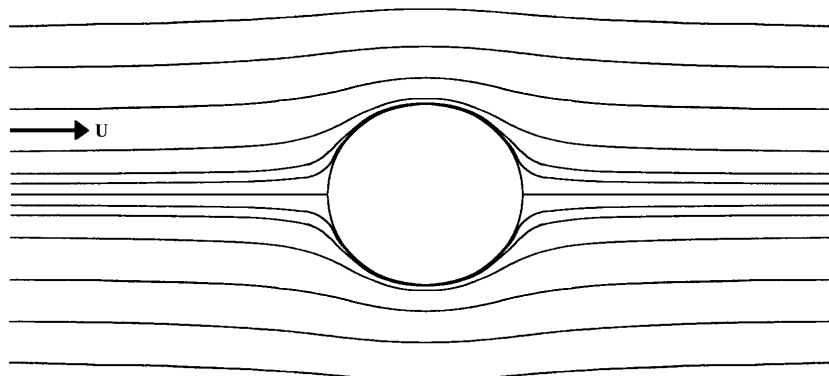
- en l'infini : $\Phi = \Phi_{uniforme}$ soit $\alpha = U_0$.
- au voisinage du cylindre : $v_r(r=a, \theta) = 0 \Leftrightarrow p = a^2 U_0$

D'où le champ des vitesses en tout point extérieur au cylindre :

$$\vec{v} = U_0 \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \vec{e}_r - U_0 \sin\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \vec{e}_\theta$$

b) L'allure des lignes de courant de cet écoulement :

Les points d'arrêt sont obtenus pour $v_\theta(r=a, \theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$, soit pour $\theta = 0$ ou π .



C - Ecoulement autour d'un cylindre de révolution avec circulation.

17) Pour un fluide réel (avec viscosité), on aurait une mise en mouvement du fluide au contact du cylindre avec une vitesse de rotation égale à celle du solide. L'écoulement perd sa symétrie et n'est plus à circulation nulle autour du cylindre. A la surface du cylindre, on a $\vec{v} = a\Omega\vec{e}_\theta$.

D'où $\oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \Gamma = 2\pi a^2 \cdot \Omega$.

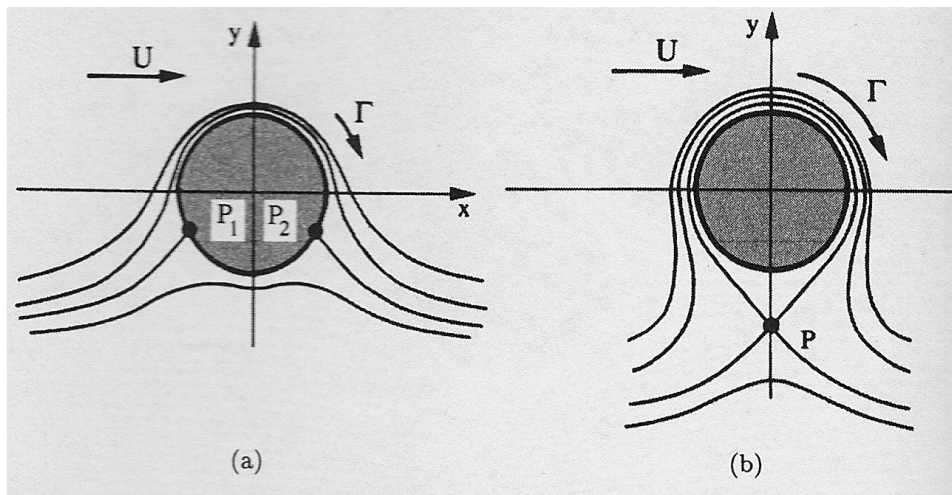
18) Le champ de vitesses résultant : $\vec{v} = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left[-U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right] \vec{e}_\theta$

Les points d'arrêt sur le cylindre sont définis par : $r = a$, $\sin \theta_a = \frac{\Gamma}{4\pi a U_0} = \frac{a\Omega}{2U_0}$, **condition**

dite de Kutta.

1^{er} cas (a) : $|\Gamma| < 4\pi a U_0$, il y a deux points d'arrêt P_1 et P_2 sur le cylindre, symétrique par rapport à l'axe Oy .

2^{ème} cas (b) : $|\Gamma| > 4\pi a U_0$, il n'y a pas de point d'arrêt sur le cylindre, mais un point d'arrêt unique P en dehors de celui-ci.



19)

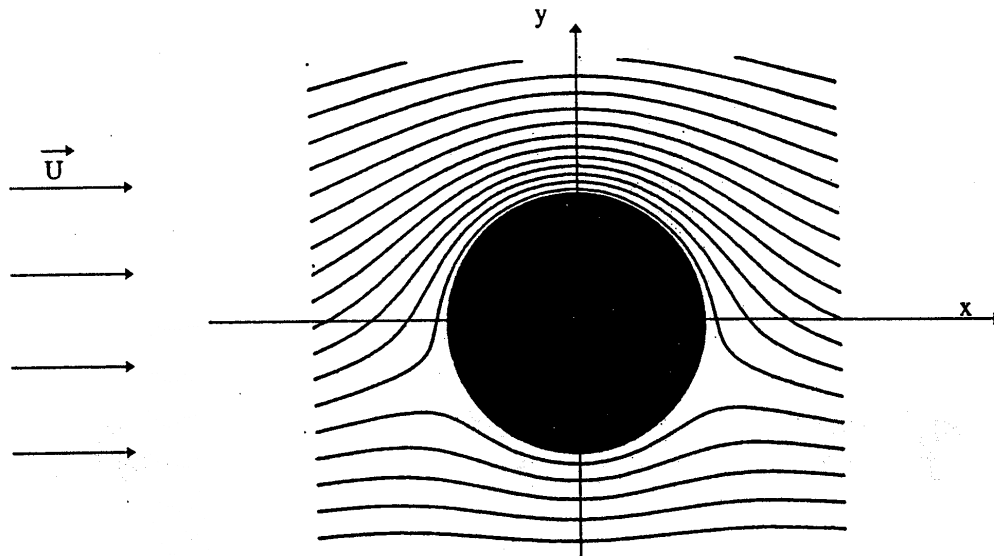


Figure 2

- a) Les lignes de courant se ressèrent plus au-dessus ($y > a$) du cylindre, donc comme le champ de vitesse est à flux conservatif on peut dire que , en module : $v(y > a) > v(y < -a)$
- b) D'après l'expression du champ de vitesse pour les angles $\theta = \pm\pi/2$, on peut affirmer que $\Gamma < 0$.
- c) On voit clairement les deux lignes d'arrêt symétrique, on est bien dans le second cas avec $\Gamma = 2\pi a^2 \cdot \Omega < 0$, donc le cylindre tourne dans le sens horaire. Sur la figure 2, on estime $\sin \theta_a = -0,5$, soit avec la condition de Kutta $\left| \frac{\Gamma}{aU_0} \right| = -4\pi \sin \theta_a \approx 2\pi = 6,3$.
- d) Qualitativement, avec la relation de Bernoulli, P et v varient en sens opposés ; $P(y > a) < P(y < -a)$; on peut s'attendre à une résultante des actions de pression vers le haut ; effort de sustentation, de portance.

20) Actions résultantes.

- a) La distribution du champ des vitesses est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), ainsi que la distribution du champ des pressions, donc la contribution des forces de pression selon l'axe des abscisses (Ox) est nulle. Les efforts de pressions élémentaires étant tous radiaux, leur moment par rapport à O est évidemment nul.

Cela est en contradiction avec l'expérience, il manque la force de traînée.

- b) Sur le cylindre, la vitesse a pour module : $v(r = a, \theta) = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$, avec le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre un point très loin du cylindre et un point au voisinage de celui-ci :

$$P(r = a, \theta) = P_0 + \frac{\rho}{2} \left[U_0^2 - \left(-2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right] = K + \frac{\rho}{2} \left[-4U_0^2 \sin^2 \theta + \frac{2U_0 \Gamma}{\pi a} \sin \theta \right]$$

Par symétrie, seule la contribution des efforts de pression selon Oy est non nulle :

$$dF_y = -\sin \theta \cdot P(r = a, \theta) dS \text{ avec } dS = Ha d\theta.$$

Or $\int_0^{2\pi} \sin \theta . d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta . d\theta = 0$, d'où le seul terme non nul :

$$F_y = -\frac{\rho H U_0 \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta . d\theta = -\rho U_0 H \Gamma$$

Soit $\vec{F} = -\rho U_0 H \Gamma \vec{e}_y = \rho U_0 \vec{e}_x \wedge \Gamma \vec{e}_z$

Commentaires :

- si $\Gamma = 0$, alors $\vec{F} = \vec{0}$, on retrouve le paradoxe dit de d'Alembert.
- si $\Gamma \neq 0$, alors $\vec{F} \neq \vec{0}$, effet perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement (effet Magnus), exemple du lift ou coupé en tennis, des voiles rotatives (voiles dites de Flettner pour le bateau du commandant Cousteau...)

D - Généralisation ; portance d'une aile d'avion d'envergure infinie dans un écoulement incompressible.

Théorème de Kutta-Joukowski.

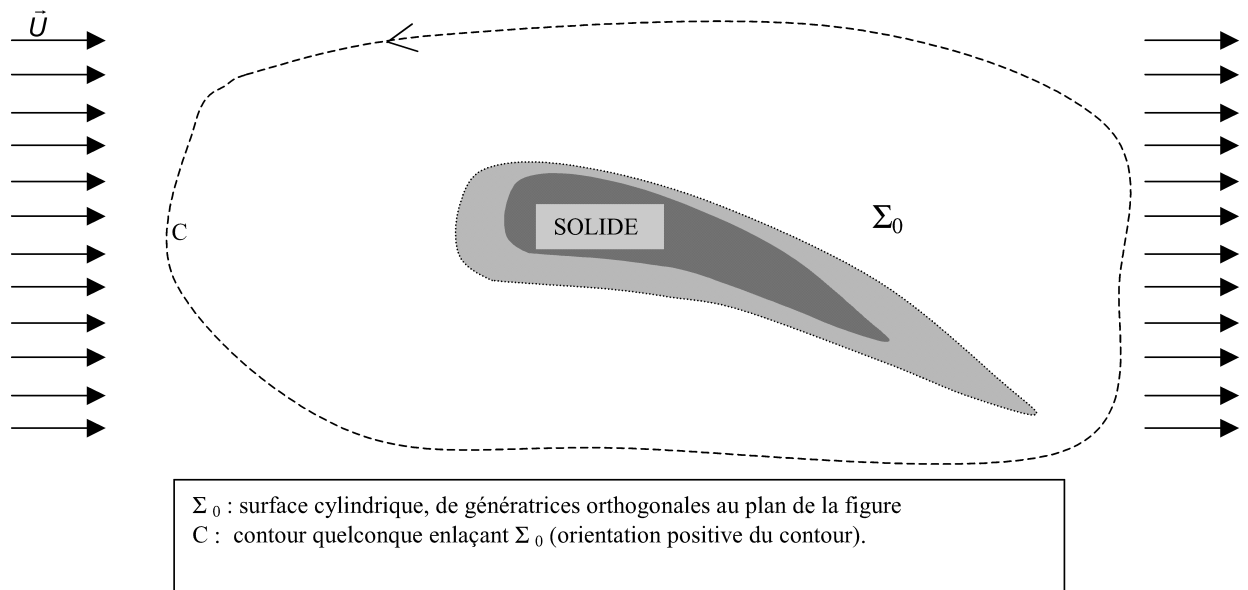


Figure 3

21) L'écoulement est supposé parfait, potentiel, incompressible, homogène et stationnaire, en appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à l'infini et un point à grande distance de l'aile :

$$P = P_0 + \frac{\rho}{2} \left[U_0^2 - (\vec{U} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \right] = P_0 - \frac{\rho}{2} \left[\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{v}_1 + 2\vec{U} \cdot \vec{v}_2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right]$$

v_2 est un terme multipolaire variant avec la distance comme $\frac{1}{r^2}$, et v_1 est un terme de circulation variant alors en $\frac{1}{r}$. Pour r grand, on peut dire que seul le terme $\vec{U} \cdot \vec{v}_1$ est d'ordre 1 en $1/r$, les autres sont d'ordres plus élevés. D'où : $P \approx P_0 - \rho U_0 v_{1x}$.

22) Par définition, ou analogie avec les débits de charge ou de masse :

$$D_{P_x} = \oint_{\Sigma_\infty} (\rho v_x) \vec{v} \cdot d\vec{S} \vec{e}_r = \iint_{\Sigma_\infty} \rho (v_x^2 \cos \theta + v_x v_y \sin \theta) dS \text{ avec } dS = R d\theta dz$$

$$D_{P_y} = \oint_{\Sigma_\infty} (\rho v_y) \vec{v} \cdot d\vec{S} \vec{e}_r = \iint_{\Sigma_\infty} \rho (v_x v_y \cos \theta + v_y^2 \sin \theta) dS$$

23) La force de pression résultante sur Σ_∞ , pour une longueur dz selon $0z$, est donnée par :

$$dF_x = - \oint_{\Sigma_\infty} P(M) d\vec{S} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = - \iint_{\Sigma_\infty} (P_0 - \rho U_0 v_{1x}) \cos \theta dS = \rho U_0 \iint_{\Sigma_\infty} v_{1x} \cos \theta dS$$

car $\oint_{\Sigma_\infty} P_0 \cos \theta dS = 0$.

De même $dF_y = - \oint_{\Sigma_\infty} P(M) d\vec{S} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = - \iint_{\Sigma_\infty} (P_0 - \rho U_0 v_{1x}) \sin \theta dS = \rho U_0 \iint_{\Sigma_\infty} v_{1x} \sin \theta dS$

24) On envisage le système fermé $(\Sigma) = (\Sigma_0) \cup (\Sigma_\infty)$, et on fait un bilan de quantité de mouvement sur ce système en régime d'écoulement stationnaire :

$$\frac{D\vec{P}((\Sigma)/\Re)}{Dt} = \vec{D}_{\vec{P}_{sortant}} = D_{P_x} \vec{e}_x + D_{P_y} \vec{e}_y = d\vec{F}_{pression} - \underbrace{d\vec{F}_{portante, aile \leftarrow fluide}}_{selon 0y} - \underbrace{d\vec{F}_{traînée, aile \leftarrow fluide}}_{selon 0x}$$

en négligeant le poids du fluide.

Or $D_{P, \Sigma_0} = 0$ car $\vec{v} \cdot \vec{n}_{\Sigma_0} = 0$ et $v_x \approx U_0 + v_{1x}$ et $v_y \approx v_{1y}$ au premier ordre en $1/R$ (le terme de circulation est prépondérant sur les termes dipolaires)

De plus, en un point de Σ_∞ , $dx = -R \sin \theta d\theta$ et $dy = R \cos \theta d\theta$

En projection selon $0x$:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{traînée, fluide \rightarrow aile}}{dz} &= -\rho \int_0^{2\pi} [(U_0 + v_{1x})^2 \cos \theta + (U_0 + v_{1x}) v_{1y} \sin \theta - U_0 v_{1x} \cos \theta] R d\theta \\ &\approx -\rho U_0 \int_0^{2\pi} [v_{1x} \cos \theta + v_{1y} \sin \theta] R d\theta = -\rho U_0 \int_0^{2\pi} \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_r R d\theta = 0 \end{aligned}$$

car l'écoulement est incompressible. Il n'y a pas de force de traînée avec ce modèle !

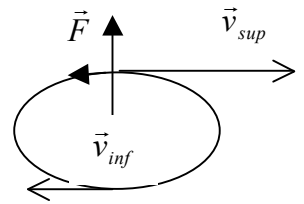
En projection selon $0y$:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{portante, fluide \rightarrow aile}}{dz} &= -\rho \int_0^{2\pi} [(U_0 + v_{1x}) v_{1y} \cos \theta + v_{1y}^2 \sin \theta - U_0 v_{1x} \sin \theta] R d\theta \\ &\approx -\rho U_0 \int_0^{2\pi} [v_{1y} \cos \theta - v_{1x} \sin \theta] R d\theta = -\rho U_0 \oint_{(C_\infty)} (v_{1x} dx + v_{1y} dy) = -\rho U_0 \oint_{(C_\infty)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = -\rho U_0 \Gamma \end{aligned}$$

Soit en résumé :
$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \rho \vec{U} \wedge \Gamma \vec{e}_z \quad (1)$$

25) Le sens de la force dépend du signe de la circulation. Avec une circulation $\Gamma < 0$, on a une force de portance dirigée vers le haut ; conforme à l'étude précédente.

Dans ce cas, la vitesse est plus élevée au-dessus de l'aile qu'en-dessous ce qui explique l'apparition d'une dépression sur la partie supérieure et d'une surpression sous la partie inférieure en vertu du théorème de Bernoulli, d'où la force verticale ascendante.



La courbure des ailes d'avion est à l'origine de l'apparition de la circulation de la vitesse non nulle le long de leur pourtour, qui provoque alors la sustentation de l'avion.

E - Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée avec un angle de cabrage ; méthode de superposition.

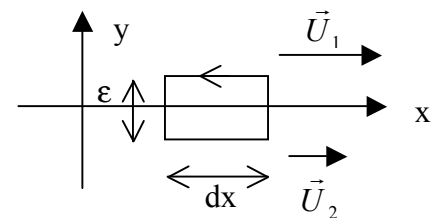
26) On applique le théorème de Stokes-Ampère sur un contour élémentaire (C) de hauteur ε et de longueur dx orienté selon la figure ci-contre :

$$\oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = [U_2 - U_1] dx = \iint_{\Sigma(C)} \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\iint_{\Sigma(C)} \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$ reste fini bien que la surface tende vers

zéro, ce qui définit bien une nappe surfacique de vorticité de densité :

$$\gamma = \frac{d\omega}{dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \text{rot}(\vec{v}) \cdot dy \vec{e}_z = [U_2 - U_1]$$



27) Analogie électromagnétique : nappe de courant surfacique et discontinuité du champ magnétique à la traversée d'une telle nappe (  partir de l'équation de Maxwell-Ampère)

28) Dans le cas d'une aile faiblement cabr e, avec une géométrie élémentaire rectiligne, la

densité linéique de vorticité doit vérifier l'équation :
$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma(C)} \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_0^L \gamma(X) dX$$

soit $\Gamma = -\alpha U_0 \pi L = 4\pi a U_0 \theta_a$, avec $\alpha = -\theta_a$ et $L = 4a$.

Or la condition de Kutta s'écrit : $\sin \theta_a = \frac{\Gamma}{4\pi a U_0} \approx \theta_a$ pour les petits angles, ce qui est bien

cohérent avec l'expression précédente.

On vérifie aussi que $\gamma(L) = 0$ car $U_1 = U_2$.

29)

a) Le plan $Y = 0$ de l'aile est un plan de symétrie de la distribution de vorticité (analogue de l'étude des symétries d'une distribution de courant en magnétostatique), c'est donc un plan d'anti-symétrie pour le champ des vitesses, soit : $v_{Ti}^+(X) = -v_{Ti}^-(X)$, et d'après la question

précédente : $-v_{Ti}^+(X) + v_{Ti}^-(X) = \gamma(X)$ donc $v_{Ti}^+(X) = -\frac{\gamma(X)}{2} = -v_{Ti}^-(X)$

b) On en déduit les composantes tangentielles :

$$v_t^+(X) = U_0 \cos \alpha - \frac{\gamma(X)}{2} \approx U_0 + \alpha U_0 \sqrt{\frac{L-X}{X}} \text{ et}$$

$$v_t^-(X) = U_0 \cos \alpha + \frac{\gamma(X)}{2} \approx U_0 - \alpha U_0 \sqrt{\frac{L-X}{X}} \text{ de la vitesse totale de l'écoulement.}$$

30)

a) Avec le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à l'infini et un point M proche de l'aile : $P = P_0 + \frac{\rho}{2}(U_0^2 - v^2)$ soit

- au niveau de l'extrados : $P^+(X) \approx P_0 - \rho U_0^2 \alpha \sqrt{\frac{L-X}{X}}$ à l'ordre 1 en α

- au niveau de l'intrados : $P^-(X) \approx P_0 + \rho U_0^2 \alpha \sqrt{\frac{L-X}{X}}$ à l'ordre 1 en α

b) On en déduit la composante F_Y de la résultante de l'action de l'air sur l'aile : $F_Y = \iint_{aile} (P^- - P^+) dS = 2\rho U_0^2 \alpha H \int_0^L \sqrt{\frac{L-X}{X}} dX = \pi \rho U_0^2 \alpha HL = \rho U_0 |\Gamma|$, on bien une force de portance positive.

$$\text{avec } \Gamma = \int_0^L (v_t^- - v_t^+) dX = -\pi \alpha U_0 L$$

Cette étude est compatible avec le théorème de Kutta- Joukowski.

Le coefficient de portance pour l'aile mince rectangulaire est défini par :

$$C_y = \frac{F_Y}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 LH} = 2\pi\alpha, \text{ sans dimension.}$$

c) Estimation numériques ;

	Portance (N)	Poids (N)	Accélération verticale (m.s ⁻²)
Airbus A320	7,85.10 ⁵	7,35.10 ⁵	10,5 ≈ 1 g
Mirage 2000	5,50.10 ⁵	1,57.10 ⁵	34 ≈ 3,5 g

On vérifie que la surface des ailes est bien suffisante pour assurer une portance verticale supérieure à la valeur du poids de l'avion.

L'accélération verticale d'un avion de chasse est très supérieure.

d) Le moment M_z dit **de tangage** par unité de longueur de l'aile des efforts de portance, par rapport à un axe parallèle au **bord d'attaque** en $X = 0$ vaut :

$$d\vec{M}_0 \cdot \vec{e}_z = X \cdot dF_P(X) \text{ d'où } M_{0z} = 2\rho U_0^2 \alpha H \int_0^L X \sqrt{\frac{L-X}{X}} dX = \frac{\pi}{4} L^2 \rho U_0^2 \alpha$$

On en déduit le point d'application de la portance X_F : c'est le point d'abscisse X_F vérifiant :

$$\vec{0} = \vec{M}_0 + \vec{FO} \wedge \vec{F} \text{ soit } X_F = \frac{M_{0z}}{F} = \frac{L}{4}$$

En ce qui concerne l'équilibre et la stabilité de l'aile en cours de vol, on compare la position de ce point F à la position du centre d'inertie G. Si $G=F$, l'équilibre est parfait.

D'autre part, plus le point F est loin de l'axe de l'avion, plus l'avion peut être déséquilibré par une modification de la portance.

On définit également un coefficient de moment $C_m = \frac{M_z}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 L^2 H} = \frac{\pi\alpha}{2}$.

e) Dans une première partie de la courbe, on retrouve bien un profil rectiligne avec une pente théorique pour θ en degré :

$$C_y = 2\pi\alpha \cdot \frac{\pi}{180} = 0,11\alpha,$$

on trouve expérimentalement :

$$C_y = \frac{1,8}{16} = 0,11\alpha, \text{ très bon accord.}$$

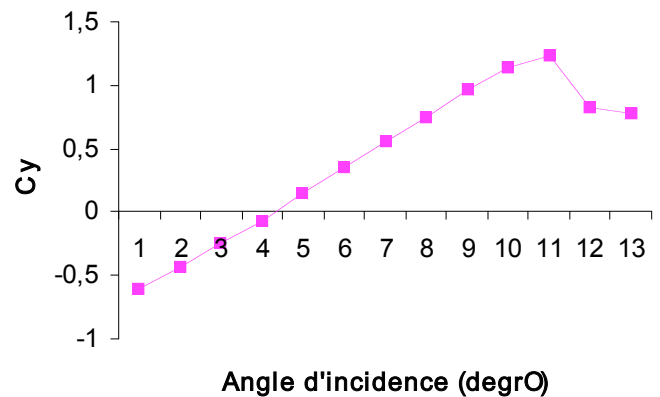


Figure 6

Cependant la courbe est décalée $C_y = k(\alpha - \alpha_0)$ où $\alpha_0 = 4^\circ$, ceci étant sûrement dû à la nature du profil qui n'est pas assimilable à une plaque mince.

De plus, le modèle affine cesse d'être vérifié pour $\theta > 10^\circ$; la couche limite décroche de la paroi de l'aile, la portance chute car la circulation décroît brutalement.

III) Eléments de théorie de la traînée. Un modèle de couche limite.

A - Modèle de Stokes ; la force de viscosité sur une sphère.

31) Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes de viscosité dépend linéairement des valeurs instantanées du tenseur des déformations et contraintes tangentielles.

Pour un écoulement unidimensionnelle de type cisaillement avec $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$, on peut

écrire :

$$\underbrace{dF_x}_{><} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} . dS$$

32)

a) L'équation de Navier Stokes :
$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}}_{\text{terme convectif}} = -\text{grad } P + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{terme diffusif}}$$

b) Par analyse dimensionnelle, on définit le nombre de Reynolds R_e :

$$R_e = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

33)

a) Avec le formulaire, on trouve : $\text{rot}(\vec{v}) = -\frac{3}{2} \frac{U_0 R \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi$, puis

$$\text{rot}[\text{rot}(\vec{v})] = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v} = -\frac{3U_0 R}{2r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

$$\text{d'où } \Delta \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(3U_0 \frac{R \cos \theta}{2r^2} \right)$$

b) En se plaçant en régime stationnaire et en négligeant les termes non linéaires d'accélération convective, l'équation de Navier-Stokes se résume à : $-\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$, soit d'après l'expression obtenue à la question précédente, et à la condition limite loin de la sphère :

$$P(r, \theta) = P_0 - 3\eta U_0 \frac{R \cos \theta}{2r^2} \text{ pour } R_e \ll 1.$$

c) La pression étant une fonction paire de θ , la résultante des efforts de pression est seulement dirigée selon 0x. Sur un élément de surface de la sphère :

$$d\vec{F}_p = -P(r = R, \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

d'où la contribution élémentaire selon l'axe 0x : $dF_{p,x} = -P(r = R, \theta) R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$

$$\text{soit } F_{p,x} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \eta U_0 R \cos^2 \theta d(-\cos \theta) - P_0 \underbrace{\oint_{\text{sphère}} \cos \theta dS}_{=0} = 3\pi\eta U_0 R \int_{-1}^{+1} u^2 du$$

d'où la résultante des forces de pression agissant sur la sphère : $\vec{F}_p = 2\pi\eta U_0 R \vec{e}_x$.

34) On admet que la force de cisaillement exercé par le fluide sur un élément de surface de

sphère est donnée par $d\vec{F}_{\text{viscosité}} = -\frac{3\eta U_0 R \sin^2 \theta}{2} d\theta d\varphi \vec{e}_\theta = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$

conforme à l'expression obtenue à la question 32.

Par symétrie, la résultante est dirigée selon 0x. Alors la résultante des forces de cisaillement

$$\text{sur la sphère s'écrit : } \vec{F}_{\text{viscosité}} = \left(\iint_{\text{sphère}} d\vec{F}_v \cdot \vec{e}_x \right) \vec{e}_x = \left(\frac{3}{2} \eta U_0 R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) \vec{e}_x$$

$$\text{Soit } \vec{F}_{\text{viscosité}} = 4\pi\eta U_0 R \vec{e}_x$$

35)

a) La force de traînée sur la sphère est donnée par la loi : $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{viscosité}} = 6\pi\eta R U_0 \vec{e}_x$ dite loi de Stokes.

Par analogie avec la question 30), on peut définir un coefficient de traînée :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 L H} = \frac{12\eta}{\rho U_0 R} = \frac{24}{R_e} \text{ avec } L = 2R$$

b) La figure 7 reproduit la courbe expérimentale $C_x = f(R_e)$, où R_e désigne le nombre de Reynolds.

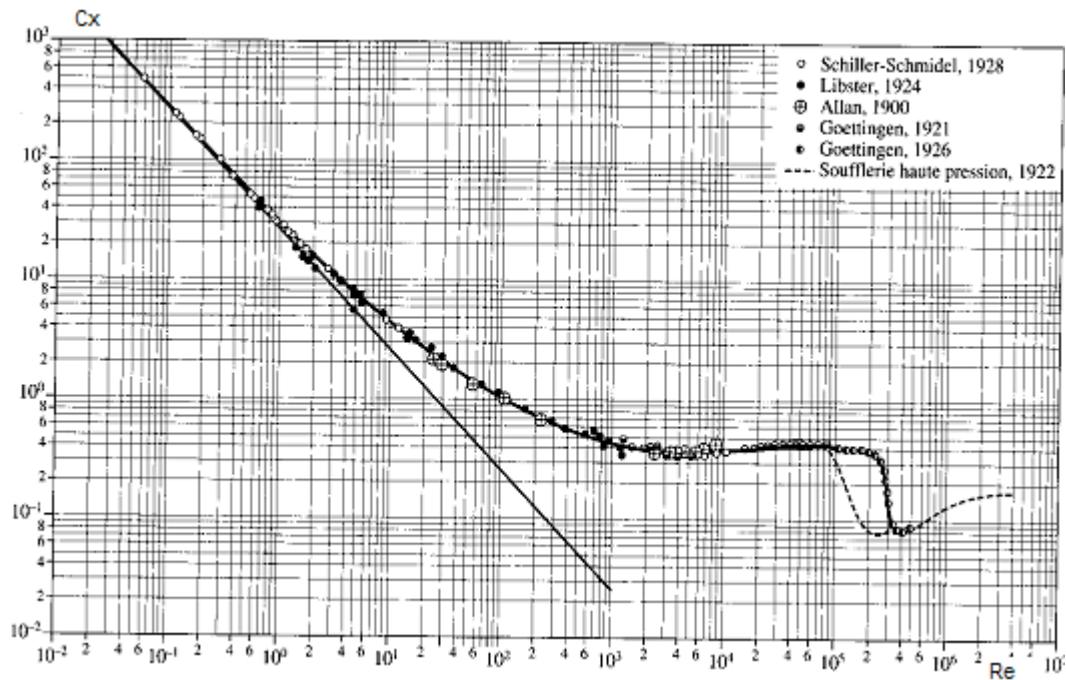


Figure 7

En échelle log-log, la loi $C_x \propto \frac{1}{R_e}$ conduit à une droite de pente -1 . La loi de Stokes est valable tant que $R_e < 2$.

c) $F_x \propto U_0^2$ si $C_x = \text{constante}$, soit pour $2 \cdot 10^3 \leq R_e \leq 2 \cdot 10^5$, ce qui définit le domaine de vitesse $2 \cdot 10^3 \frac{v}{2R} \leq U_0 \leq 2 \cdot 10^5 \frac{v}{2R}$.

Dans ce cas la force de traînée a pour expression : $\vec{F}_x = -\frac{1}{2} \rho \pi R^2 C_{x0} U_0^2 \vec{e}_x$

B - Modèle de la couche limite laminaire et force de traînée.

36) *Mise en mouvement d'une plaque infinie surmontée d'un fluide : épaisseur de diffusion.*

a) D'après l'équation de Navier-Stokes, selon :

$$- 0Y : \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \Rightarrow P(X, t)$$

$$- 0X : \frac{\partial P}{\partial X}(X, t) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}(Y, t) - \rho \frac{\partial v}{\partial t}(Y, t) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial X}(X, t) = \text{constante, mais à l'infini,}$$

la pression est constante $P_\infty = P_0$ donc $\frac{\partial P}{\partial X}(X, t) = 0$.

La pression est donc bien uniforme $P = P_0$.

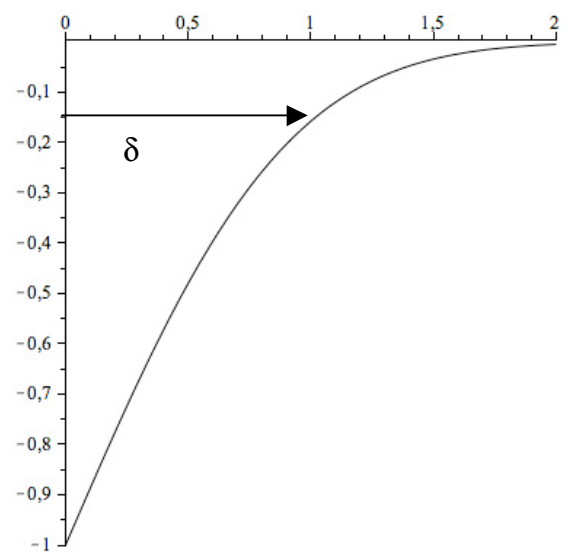
b) L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(Y, t)$ est alors : $\frac{\partial v}{\partial t}(Y, t) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}(Y, t)$, il s'agit d'une équation de diffusion, avec les conditions aux limites : $\begin{cases} v(Y \rightarrow \infty, t) = 0 \\ v(Y = 0, t) = -U_0 \end{cases}$ et la condition initiale $v(Y, t = 0) = 0$.

c) On cherche une solution du problème sous la forme $v(Y, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{\nu t}}\right) + B$, soit d'après les conditions précédentes, les données de la fonction $\operatorname{erf}(u)$ en introduction, on trouve : $\begin{cases} B = -U_0 \\ A + B = 0 \end{cases}$, soit $v(Y, t) = U_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{\nu t}}\right) - 1 \right]$

d) Représentation graphique $\frac{v(u)}{U_0} = \operatorname{erf}(u) - 1$, à un instant donné :

La grandeur $\delta = \sqrt{\nu t}$ est homogène à une longueur caractéristique ; pour $\frac{Y}{\sqrt{\nu t}} \approx 2$, $v(Y, t) \rightarrow 0$, soit au delà de $Y \approx 2\delta$ on peut considérer que le fluide n'est plus entraîné par la plaque en mouvement.

Le mouvement de translation de la plaque se transmet aux couches de fluide voisines par transfert diffusif visqueux. Il se crée donc au voisinage de la plaque une couche dite limite à fort gradient de vitesse, δ représente la longueur typique de cette diffusion.



37) Mise en mouvement d'une plaque semi- infinie surmontée d'un fluide - problème de Stokes.

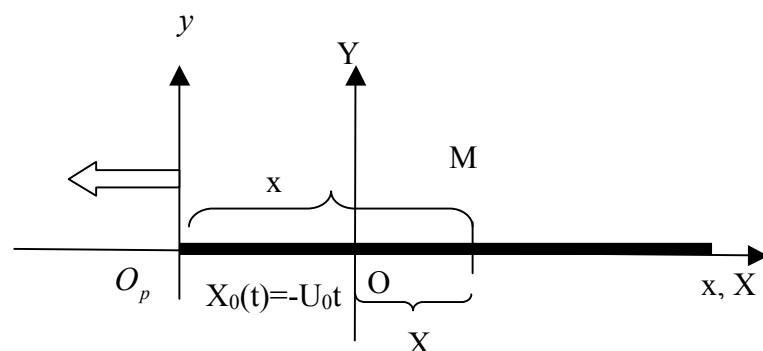
a) Dans le référentiel d'axes $O_p xy$ lié à la

plaque, on a : $Y = y$, $x = X - X_0(t) = X + U_0 t$,

d'où par composition des vitesses :

$v_{\text{plaque}} = v_{\text{sol}} + U_0$ et par

définition $t_x = -\frac{X}{U_0}$, soit



- pour $X < X_0$, ou $x < 0$, $v(x, y, t) = 0$, le fluide est au repos
- pour $X > X_0$, ou $x > 0$,

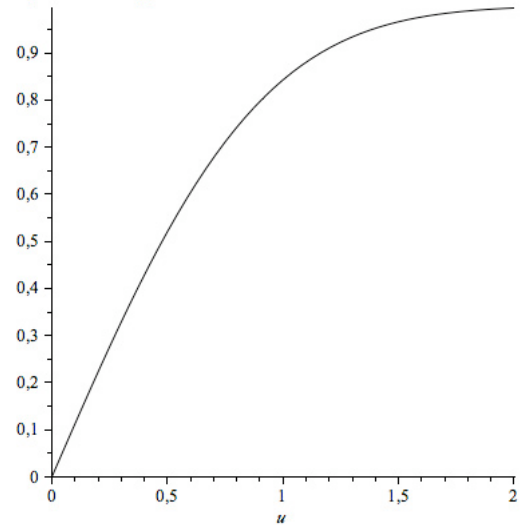
$$v(x, y, t) = v(Y = y, t - t_x) + U_0 = U_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu(t - t_x)}}\right) - 1 \right] + U_0 = U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu(t + X/U_0)}}\right) = U_0 \operatorname{erf}\left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\right)$$

On a bien $v(x, y) = U_0 F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$, où $\delta(x) = \sqrt{v \frac{x}{U_0}}$ et $F(u) = \text{erf}(u)$.

b) Représentation graphique de $\frac{v}{U_0} = \text{erf}(u)$ pour $x > 0$:

Pour $y = 2\delta$, on $v - U_0 = 0,01 U_0$, $\delta(x)$ représente l'épaisseur caractéristique de la couche limite, à l'abscisse x par rapport au bord d'attaque de la plaque.

c) On calcule $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$, donc cette solution n'est pas compatible avec le caractère incompressible du fluide.



38) *Modèle de Prandtl-Blasius.*

a) Pour l'écoulement bidimensionnel incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ soit en

raisonnant en ordre de grandeur : $\left| \frac{V_x}{\ell} \right| \cong \left| \frac{V_y}{\delta} \right|$, or on suppose $\delta(x) \ll \ell$ donc $|v_y| \ll |v_x|$.

L'équation de Navier Stokes complète, selon Ox, en régime stationnaire conduit à :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

Or $\left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right| \cong \frac{V_x}{\delta^2}$ et $\left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right| \cong \frac{V_x}{\ell^2}$, d'où $\left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right|$

De même $\frac{\left| v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|}{\left| v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|} \cong \frac{V_x / 1}{V_y / \delta} \approx 1$, d'où l'équation (3) $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

La projection de l'équation de Navier-Stokes selon Oy:

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \cancel{\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}$$

Comme précédemment : $\left| \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right|$ et $\frac{\left| v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right|}{\left| v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|} \cong \frac{V_x / 1}{V_y / \delta} \approx 1$

Ainsi $\left| v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right| \cong \frac{\delta U_0^2}{\ell^2}$ et $\left| v \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right| \cong \frac{\nu U_0}{\delta \ell} = \frac{\delta U_0^2}{\ell^2}$ par définition de δ

Donc les trois termes restants sont du même ordre, on peut écrire : $\left| \frac{\partial P}{\partial y} \right| \equiv \rho \frac{U_0^2 \delta}{L^2}$.

On en déduit que les variations de la pression dans la direction Oy de la couche limite sont négligeables car : $\Delta P \equiv \rho \frac{U_0^2 \delta^2}{L^2} \ll 1$

b) En dehors de la couche limite, l'écoulement est supposé parfait et quasi-parallèle à l'axe Ox , de vitesse U_0 , on applique le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à l'infini et un point d'abscisse x : $P(x) + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2$. La pression est indépendante de x .

c) Les conditions aux limites sont :

- pour $y \rightarrow 0$, $v_x \rightarrow 0$, $v_y \rightarrow 0$, soit $f(0) = 0$, $g(x, 0) = 0$
- pour $y \rightarrow \infty$, $v_x \rightarrow U_0$, $v_y \rightarrow 0$, soit $f(\infty) = 1$, $g(x, \infty) = 0$

d) On écrit la condition d'incompressibilité de l'écoulement :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -U_0 f'(w) y \frac{\delta'(x)}{\delta^2(x)} + U_0 \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{1}{\delta(x)} = 0$$

soit $\frac{\partial g}{\partial w} = f'(w) w \delta'(x)$ puis en intégrant par rapport à w :

$g(x, w) - \underbrace{g(x, 0)}_{=0} = \delta'(x) \int_0^w f'(\xi) \cdot \xi d\xi$ puis en intégrant par parties :

$$g(x, w) = \frac{1}{2\sqrt{\text{Re}(x)}} \left[w \cdot f(w) - \int_0^w f(\xi) d\xi \right], \text{ avec } \delta'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \text{ et } \text{Re}(x) = \frac{U_0 x}{\nu}.$$

D'après l'équation de la dynamique de la couche limite : $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ car la pression est quasi uniforme, soit :

$$U_0^2 \left[f \cdot f'(w) \left(-y \frac{\delta'}{\delta^2} \right) + g \frac{1}{\delta} \cdot f'(w) \right] = \nu \frac{1}{\delta^2} f''(w) U_0 \Leftrightarrow$$

$$U_0 \left[-f \cdot f' \cdot w \cdot \frac{\delta'}{\delta} + f' \cdot \frac{\delta'}{\delta} \left(w \cdot f - \int_0^w f(\xi) d\xi \right) \right] = \nu \frac{1}{\delta^2} f'' \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu \cdot f''}{U_0 \delta \delta'} + f' \int_0^w f(\xi) d\xi = 0$$

D'où l'équation de Blasius : $2f''(w) + f'(w) \int_0^w f(\xi) d\xi = 0$

e) La solution $f(w)$ de cette **équation dite de Blasius** a été obtenue numériquement (figure 9).

On distingue deux régions :

- une zone linéaire pour $w < 3$, avec $f(w) = 3w$, le profil de vitesse est linéaire près de la paroi.

On peut écrire : $v_x = 0,3U_0 \frac{y}{\delta(x)}$

- une constante pour $w > 5$, $f(w) = 1$, le champ de vitesse est identique à celui de l'écoulement principal supposé parfait (hors de la couche limite): $v_x = U_0$

- donc pour $d(x) > 5 \delta(x)$, on peut considérer que l'on est en dehors de la couche limite.

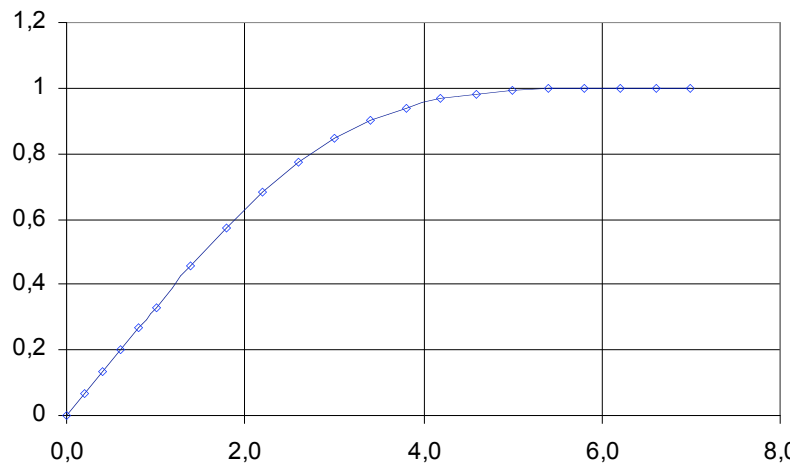


Figure 9

39)

a) D'après la loi de Newton : $dF_x = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} . 2Hdx$ soit

$$dF_x = \eta U_0 \frac{1}{\delta(x)} f'(0) . 2Hdx \text{ avec } f'(0) = 0,3 \text{ d'après la figure 9 .}$$

$$\text{D'où } F_x = 2U_0 \eta H f'(0) \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \int_0^\ell x^{-1/2} dx = 4U_0 \eta H f'(0) \sqrt{\frac{U_0 \ell}{\nu}}$$

Donc la force de **traînée due au frottement** sur l'ensemble des deux faces de l'aile plane de corde ℓ , d'envergure H s'écrit : $F_x = \frac{4\rho H \ell f'(0)}{\sqrt{Re(\ell)}} U_0^2$ avec $Re(\ell) = \sqrt{\frac{U_0 \ell}{\nu}}$. La force varie quadratiquement avec la vitesse de l'écoulement.

$$\text{On en déduit le coefficient de traînée } C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 H \ell} = \frac{8f'(0)}{\sqrt{Re(\ell)}} = \frac{2,66}{\sqrt{Re(\ell)}}$$

A la question 35), C_x varie en $1/Re$; ici les variations sont plus lentes car la diffusion visqueuse est concentrée dans une faible épaisseur de la couche limite et est favorisée par la présence de gradients de vitesse plus important que dans la situation où $Re \ll 1$.

b) D'après la question Q39 b), $P(x) + \frac{1}{2} \rho U_0^2(x) = \text{constante}$, soit $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho U_0 \frac{dU_0}{dx}$

Un gradient de pression entraîne un écoulement dans le sens opposé. Si $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ alors

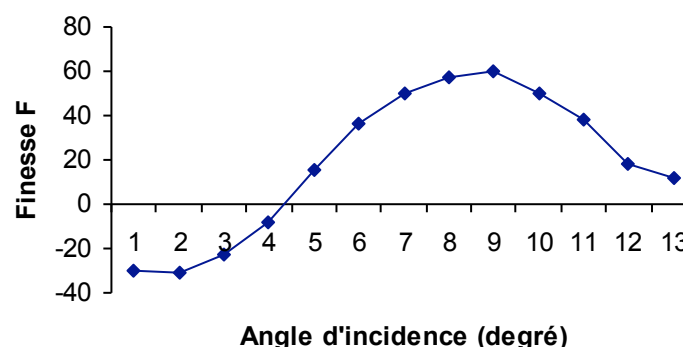
$\frac{dU_0}{dx} < 0$, la vitesse diminue, ce qui peut provoquer un renversement local du sens de

l'écoulement près de l'aile, correspondant à un décollement de la couche limite.

c) Sur la figure 6, on constate que la portance n'est positive que pour un angle d'incidence supérieur à 4° (pas d'aile horizontale).

Figures 10

L'augmentation de l'angle d'incidence déplace le point d'arrêt vers le bas et augmente ainsi la circulation de la vitesse autour de l'aile, ce qui



augmente la portance d'après la loi de Magnus(d'avantage que la traînée).

La finesse augmente aussi. Quand l'angle d'incidence est trop important ($i > 9^\circ$) , la couche limite commence à décoller , la traînée augmente et la portance diminue beaucoup, donc la finesse diminue, il y a risque de décrochage.

Pour « recoller » cette couche limite, en rajoutant des volets soit sur le bord d'attaque, ou sur le bord de fuite, afin d'augmenter la circulation de la vitesse.

C - Quelques éléments de mécanique du vol. Importance des coefficients C_x et C_z .

Modélisation de la traînée induite (Bradley Jones en 1942 et sur un principe développé par Rankine en 1858).

40) On effectue un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé constitué :

- à l'instant t , par le fluide compris dans le volume de contrôle hachuré et la masse de fluide dm_e qui va rentrer dans ce volume pendant la durée élémentaire dt ,
- à l'instant $t + dt$, par le fluide compris dans le volume de contrôle et la masse de fluide dm_s qui va sortir pendant la même durée dt .

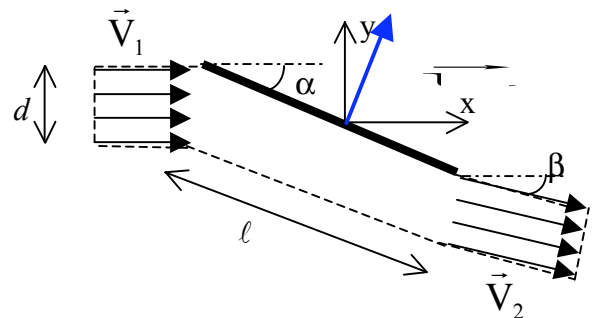


Figure 12 : aile vue de profil

L'écoulement est stationnaire dans le référentiel lié à l'aile supposé galiléen conduit à ;

$$\frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{aile \rightarrow fluide} + \cancel{\vec{P}oids} + \iint_{(\Sigma) - \Sigma_{aile}} -P_0 \vec{n}_{ext} dS$$

$$\text{or } \iint_{(\Sigma)} -P_0 \vec{n}_{ext} dS = \vec{0} = \iint_{(\Sigma) - \Sigma_{aile}} -P_0 \vec{n}_{ext} dS - H\ell P_0 \vec{u}$$

donc la force résultante sur l'aile est : $\vec{F} = \vec{F}_{fluide \rightarrow aile} - H\ell P_0 \vec{u}$

Soit en projetant selon les axe $0x$, et $0y$:
$$\begin{cases} F_{xi} = \rho d H V^2 (1 - \cos \beta) \\ F_y = \rho d H V^2 \sin \beta \end{cases} \text{ avec } D_m = \rho d H V$$

Or par définition des coefficients , on peut aussi

$$\text{écrire : } \begin{cases} \frac{1}{2} \rho H \ell C_{xi} V^2 = \rho d H V^2 2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \rho H \ell C_y V^2 = \rho d H V^2 2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \end{cases} \text{ soit } \boxed{\tan \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{C_{xi}}{C_y} = \frac{2 \sin \alpha}{2 + A}}$$

Puis en posant $t = \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)$, $\sin \beta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{\ell}{d} \cdot \frac{\pi \sin \alpha}{1 + 2/A}$

$$\text{soit } \boxed{d = \frac{\pi H}{4} \left(1 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{(A+2)^2} \right)} \text{ avec } A = H / \ell .$$

Pour $A > 4$, on montre que $\frac{4 \sin^2 \alpha}{(A+2)^2} < \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ donc $d \approx \frac{\pi H}{4}$ indépendant de la corde mais pas de l'envergure qui joue un rôle important.

Ou avec $d \approx \frac{\pi H}{4}$, on peut écrire
$$\begin{cases} F_{xi} \approx \frac{\pi}{2} \rho H^2 V^2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) \prec H^2 \\ F_y \approx \frac{\pi}{4} \rho H^2 V^2 \sin \beta \prec H^2 \end{cases}$$

Les deux forces dépendent de H^2 ; pour un angle de déflexion donné β , la surface pertinente n'est pas $S = H\ell$ mais $\frac{\pi H^2}{4}$ (surface balayée).

Variantes : si $\ell \ll H$, les forces ont pour expressions approchées :

$$\begin{cases} F_{xi} \approx 2\pi\rho\ell^2 V^2 \sin^2 \alpha \prec \ell^2 \\ F_y \approx \pi\rho H\ell V^2 \sin \alpha \prec H\ell \end{cases} \quad \text{on fait apparaître une surface pertinente } H\ell \sin \alpha.$$

Modélisation de la traînée de frottement.

41) On se place toujours en régime stationnaire, on suppose que la vitesse relative de l'air à l'entrée de la surface de contrôle est $\vec{V}_1 = V\vec{e}_x$ et à la sortie $\vec{V}_2 = (V - \Delta V)\vec{e}_x$ avec $\Delta V \ll V$. On exprime un nouveau bilan de quantité de mouvement sur un système fermé analogue à celui de la question précédente, pour une horizontale, on obtient de façon évidente :

$$\frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\vec{F}_{x,f} \quad \text{avec} \quad \frac{dm}{dt} = \rho dHV$$

soit en projetant selon 0x : $dH\rho V(-\Delta V) = -F_{x,f} \Leftrightarrow F_{x,f} = \frac{\pi}{4} H^2 \rho V \Delta V = \frac{1}{2} C_0 \rho S V^2$ avec l'expression de d approchée obtenue précédemment. On identifie cette expression à celle faisant intervenir C_0 d'où : $\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{C_0}{\pi} \frac{\ell}{H} = 2 \frac{C_0}{\pi A}$.

Si $A \gg 1$ alors $\frac{\Delta V}{V} \ll 1$, la traînée de frottement est moins importante, et on justifie l'approximation initiale de ce modèle.

42) En vol horizontal stationnaire, on a en projetant selon la vertical : $F_y = Mg$ soit

$$\sin \beta = \frac{4Mg}{\pi\rho H^2 V^2} \approx \beta \quad \text{pour les petits angles}$$

La force de traînée totale F_x s'écrit :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{xi} + C_0) \approx \rho \frac{\pi}{8} A S V^2 \beta^2 + \frac{1}{2} \rho S V^2 C_0 = \frac{2M^2 g^2}{\pi \rho A S} \cdot \frac{1}{V^2} + \frac{1}{2} \rho S C_0 V^2$$

43)

a) La puissance nécessaire pour maintenir l'avion sur sa trajectoire est donc : $P = F_x V$

$$\text{soit } P = \frac{2M^2 g^2}{\pi \rho A S} \cdot \frac{1}{V} + \frac{1}{2} \rho S C_0 V^3.$$

Le minimum de puissance est obtenue pour : $\frac{dP}{dV} = 0 = -\frac{2M^2 g^2}{\pi \rho A S} \cdot \frac{1}{V^2} + \frac{3}{2} \rho S C_0 V^2$

ce qui correspond à la vitesse de croisière V_0 définie par : $V_0^4 = \frac{4}{3\pi C_0 A} \left(\frac{Mg}{\rho S} \right)^2$ (qui est bien un minimum).

En reportant dans l'expression de la puissance on obtient :

$$P_{min} = \frac{1}{V_0} \left[\frac{2M^2 g^2}{\pi \rho A S} + \frac{1}{2} \rho S C_0 V_0^4 \right] = \frac{M^2 g^2}{\pi \rho A S} \left(2 + \frac{2}{3} \left[\frac{4}{3\pi C_0 A} \left(\frac{Mg}{\rho S} \right)^2 \right]^{-1/4} \right) = 2 \left(\frac{4}{3\pi A} \right)^{3/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{(\rho S)^{1/2}} C_0^{1/4}$$

On constate que la puissance minimale est proportionnelle à $M^{3/2}$, paramètre essentiel dans le dimensionnement des avions.

Pour la vitesse de croisière $V = V_0$, on

constate que : $\frac{F_{x,f}}{F_{x,i}} = \frac{1}{3}$, la traînée induite est

plus importante que la traînée de frottement.

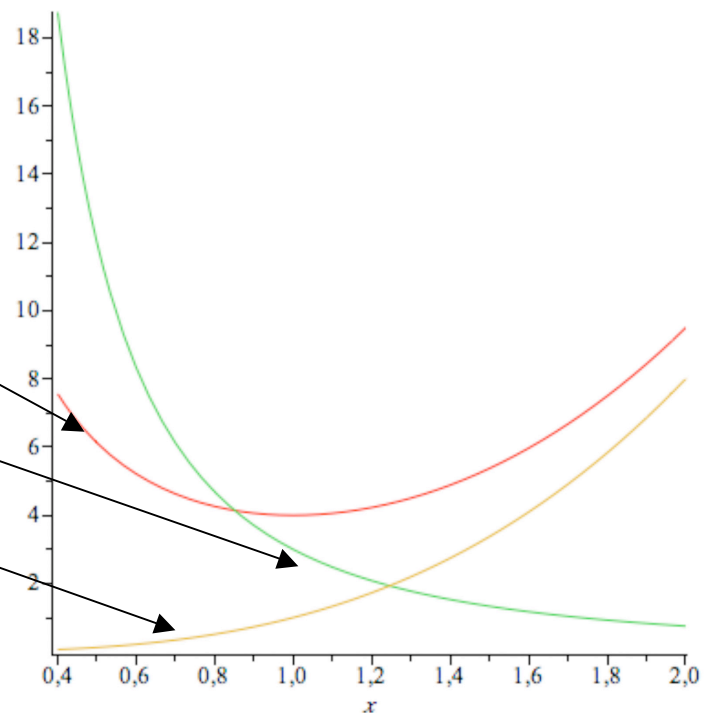
Tracés sur un même graphe de

$\frac{P}{\frac{1}{2} \rho S C_0 V_0^3}$ (rouge),

$\frac{F_{x,i}}{\frac{1}{2} \rho S C_0 V_0^2}$ (vert)

et $\frac{F_{x,f}}{\frac{1}{2} \rho S C_0 V_0^2}$ (jaune)

en fonction de $x = V/V_0$.



b) La distance maximale franchissable D , pour une réserve donnée de fuel, est obtenue pour une traînée minimale, soit :

$$\frac{dF_x}{dV} = 0 = -\frac{4M^2 g^2}{\pi \rho A S} \cdot \frac{1}{V^3} + \rho S C_0 V \quad \text{ce qui}$$

correspond bien à l'égalité des deux traînées $F_{x,f}(V') = F_{x,i}(V')$ et à la vitesse

$$V'^4 = \frac{4M^2 g^2}{\pi \rho^2 S^2 A C_0} = 3V_0^4 \quad \text{soit } V' = 3^{1/4} V_0 \approx 1,3V_0.$$

La puissance correspondante est : $P' = P(V') = \frac{3^{1/4}}{2} P_{min} \approx 1,1.P_{min}$

$$\text{c) A. N : } C_y = \frac{Mg}{\frac{1}{2} \rho S V'^2} = \frac{700.9,81.2}{1,18.31^2 \cdot 14,8} = 0,81 \quad \text{cohérent}$$

$$\text{Or } C_y = \frac{2\pi \sin \alpha}{1 + \frac{2}{A}} \Rightarrow \alpha = 9,5^\circ \quad \text{bon ordre de grandeur.}$$

De plus $F(V') = \frac{C_y}{C_{xi} + C_0} = \frac{0,81}{2C_0} \Rightarrow C_0 = 0,037$ car $C_{xi} = C_0$ pour la vitesse V' .

D'autre part $P' = F_x \cdot V' = 19,3 \text{ kW} < P_{max}$ ce qui est cohérent.

Pour les petits angles, avec $A \gg 1$, on a $\beta \approx \frac{\alpha}{2} = 4,3^\circ$, la vitesse de l'air défléchie vers le bas est ainsi $V_{bas} = V' \sin \beta = 2,3 \text{ m.s}^{-1}$ non négligeable !

La finesse aérodynamique et son importance pratique.

d) En appliquant le théorème de la résultante dynamique à l'avion en vol stationnaire, projeté

sur les deux axes horizontal et vertical :

$$\begin{cases} M \frac{dV}{dt} = 0 = F_M - \frac{1}{2} \rho S C_x V^2 \\ 0 = Mg - \frac{1}{2} \rho S C_y V^2 \end{cases} \text{ soit}$$

$-\frac{1}{K_s} \frac{dM}{dt} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \frac{Mg}{S V^2 F} \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{K_s}{F} g dt$ qui s'intègre aisément en :

$$\ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = -\frac{K_s g}{F} \Delta t \text{ avec } D = V \Delta t, \text{ soit le résultat : } D = \frac{F M_a c_s}{g K_s} \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

La distance franchissable est donc proportionnelle à la finesse F , inversement proportionnel à la consommation de fuel (tout à fait cohérent) pour un rapport $\frac{M_1}{M_2}$ constant.

	Consommation spécifique K_s	Finesse	Nombre de Mach	$\frac{F M_a}{K_s}$
Avion de ligne type Airbus A320	0,65	19	0,83	24
Avion de chasse type Mirage F1	2,5	3,5	2	2,8

L'Airbus est plus performant qu'un avion de combat mais atteint des vitesses moins élevées (heureusement !).

D - Modèle de Newton ; à la recherche de la surface de moindre résistance à l'avancement.

Je tiens à remercier M. Jacques Renault, qui m'a inspiré pour la rédaction de cette partie, à la suite d'une série de conférences tout à fait éclairantes et d'un remarquable travail sur le texte fondateur de Newton « **Principia** », et le livre de S. Chandrasekhar « **Newton's Principia for the Common Reader.** »

Choc de particules sur une surface

44) On désigne par n le nombre de particules par unité de volume de ce faisceau incident, et on suppose le choc sur S_0 élastique.

a) Pendant une durée élémentaire dt supérieure à la durée d'un choc sur la paroi, le nombre de particules venant frapper la paroi sous incidence normale est :

$$\delta N = n S_0 V dt.$$

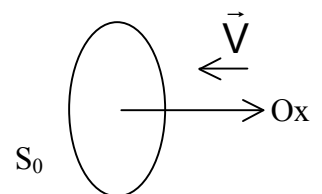


Figure 13

Le choc étant élastique, la norme de la quantité de mouvement se conserve, on en déduit la variation de quantité de mouvement pendant la durée dt :

$$\delta \vec{p} = 2 \cdot \delta N m V \vec{e}_x = 2 n m S_0 V^2 \vec{e}_x dt$$

d'où la force appliquée sur le flux de particule par la paroi :

$$\vec{F}_{\text{surface} \rightarrow \text{fluide}} = \frac{\delta \vec{p}}{dt} = 2 n m S_0 V^2 \vec{e}_x$$

soit la force exercée par les particules sur la paroi :

$$\vec{F}_1 = -2 n m S_0 V^2 \vec{e} = -C S_0 V^2 \vec{e}_x \text{ avec } C = 2 n m = 2 \rho.$$

b) On considère désormais le cas où la normale $\vec{n}$ à S_0 fait l'angle α avec la direction du faisceau de particules incident. La composante tangentielle de la vitesse des particules est supposée inchangée au cours du choc alors que la composante normale est changée en son opposée.

Soit $\delta N_\alpha = n S_0 V \cos \alpha dt$ le nombre de particules venant frapper la paroi sous incidence α .

On en déduit la variation de quantité de mouvement pendant la durée dt :

$$\delta \vec{p} = 2 \cdot \delta N_\alpha m V \cos \alpha \vec{n} = 2 n m S_0 V^2 \cos^2 \alpha \vec{n} dt$$

On trouve de la même façon que la force exercée par les particules sur la paroi :

$$\vec{F}_2 = -C S_0 V^2 \cos^2 \alpha \cdot \vec{n}$$

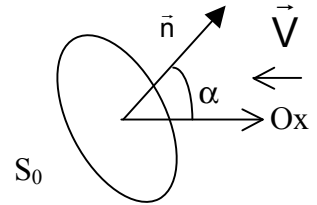


Figure 14

c) On place successivement dans le flux de particules décrit précédemment :

- un disque d'axe Ox et de rayon R , perpendiculaire au flux incident de particules, on trouve immédiatement : $\vec{F}_3 = -C \pi R^2 V^2 \vec{e}_x$
- une sphère de même rayon R que le disque ; le calcul est plus délicat.

En coordonnées sphériques, pour la surface élémentaire $dS = R^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi$, le nombre de particules frappant cette surface pendant la durée dt est : $\delta^2 N_\alpha = n dS \cos \alpha V dt$

On en déduit la variation de quantité de mouvement pendant la durée dt :

$$\delta \vec{p} = 2 \cdot \delta^2 N_\alpha m V \cos \alpha \vec{n} = 2 n m dS V^2 \cos^2 \alpha \vec{e}_r dt,$$

Ce qui correspond à la force élémentaire exercée par les particules sur la surface dS :

$$d\vec{F}_4 = -C V^2 dS \cos^2 \alpha \cdot \vec{e}_r.$$

En raison de la symétrie axiale du jet de particules, la force résultante sera orientée selon $-\vec{e}_x$. On exprime la projection de la force élémentaire selon l'axe Ox :

$$dF_{4x} = -C V^2 dS \cos^2 \alpha \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = -C V^2 dS \cos^3 \alpha \text{ soit}$$

$$F_{4x} = -C V^2 R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha = -C V^2 R^2 2\pi \left[-\frac{\cos^4 \alpha}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

donc
$$\vec{F}_4 = -C V^2 R^2 \frac{\pi}{2} \vec{e}_x$$

On en déduit le rapport : $\frac{\|\vec{F}_4\|}{\|\vec{F}_3\|} = \frac{1}{2}$, résultat obtenu par Newton.

d) On considère que le flux de particules tombe sur une surface de révolution d'axe Ox. Par symétrie, la force de pression due aux chocs est portée par Ox et dirigée suivant Ox négatif : $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$ avec $F_x < 0$. Soit dS un petit élément de surface et α l'angle que fait la normale à cet élément de surface avec la direction des particules incidentes.

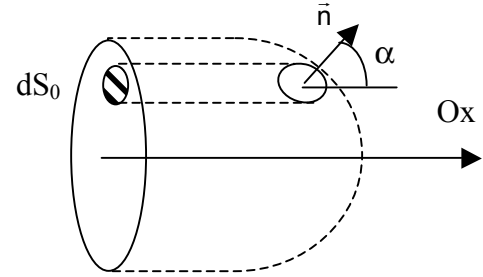


Figure 15

Avec la surface constituée d'un cône de révolution de hauteur H dont la base est un disque de rayon R, d'angle au sommet θ (voir figure 17), on a : $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ et $\tan \theta = \frac{R}{H}$ soit

$$F_x = -C\pi R^2 V^2 \sin^2 \theta = -CV^2 \frac{\pi R^2}{1 + \frac{H^2}{R^2}}.$$

Afin de minimiser $|F_x|$, il faut rendre θ le plus petit possible, donc diminuer R et augmenter H le plus possible. Difficilement réalisable.

Un premier problème d'extremum.

45)

a) Avec les mêmes notations que la question précédente, on peut écrire

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ et } dS_0 = 2\pi y dy, \text{ soit } dF_x = -CV^2 dS_0 \cos^2 \alpha,$$

d'où

$$\|\vec{F}\| = CV^2 2\pi \int y \cdot \sin^2 \theta dy.$$

b) On considère un cône de révolution tronqué s'appuyant sur un disque de rayon R et d'axe Ox, de demi-angle au sommet θ , et de hauteur H.

A partir de la figure 17 : $\tan \theta = \frac{R}{0S} = \frac{R_1}{0_1S}$ avec S le

sommet du cône, soit $\tan \theta = \frac{R - R_1}{H}$

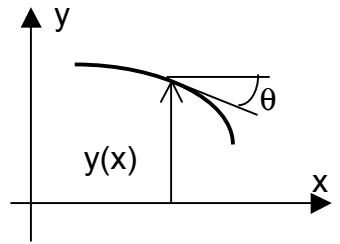


Figure 16

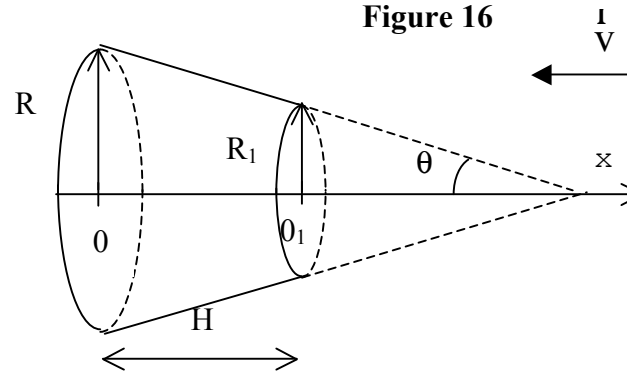


Figure 17

c) La force totale due aux chocs sur le cône tronqué peut se décomposer en 2 parties ; la force sur le disque de rayon R_1 et la force sur la partie tronquée (surface latérale du cône tronqué).

$$F_{x1} = -C\pi R_1^2 V^2$$

$$F_{x2} = -CS_0 V^2 \sin^2 \theta = -C\pi (R^2 - R_1^2) V^2 \sin^2 \theta$$

soit $F_5 = -CV^2\pi[R^2 \sin^2 \theta + R_1^2 \cos^2 \theta]$ avec $p \cdot \tan \theta = 1 - \frac{R_1}{R}$

donc

$$F_5 = -CV^2\pi R^2 [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta (1 - p \tan \theta)^2] = -CV^2\pi R^2 [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta - p \sin(2\theta)]$$

qui se met bien sous la forme :

$$\vec{F}_5 = -C\pi R^2 V^2 g(\theta) \cdot \vec{e}_x \text{ avec } g(\theta) = 1 + p^2 \sin^2(\theta) - p \sin(2\theta) \text{ avec } p = \frac{H}{R} \text{ un paramètre fixé.}$$

Pour p fixé non nul, on cherche la valeur θ_m de θ pour que $\|\vec{F}_5\|$ soit minimale :

$$\frac{dg}{d\theta} = 0 = 2p^2 \sin \theta \cdot \cos \theta - p 2 \cos(2\theta) \Leftrightarrow \cot an(2\theta_m) = \frac{p}{2}$$

d) La valeur optimale de θ pour un cône très mince, $H \ll R$, est obtenue pour $\theta_m = \frac{\pi}{4}$ (cône tronqué très fin, plat).

e) Dans le cas $H = R$ ($p = 1$), la valeur optimisée de θ est $\theta_m = \frac{1}{2} \arctan(2) = 31,7^\circ$, le module de F_x vaut : $\|\vec{F}_5\| = C\pi R^2 V^2 g(\theta_m) = 0,38 C\pi R^2 V^2 < \|\vec{F}_4\|$. C'est encore mieux !

Mise en place du problème général : la surface de moindre résistance.

46)

a) On suppose que x et y sont définis de manière paramétrique à partir d'un paramètre t donné : $x = x(t)$ et $y = y(t)$. On a vu à la question 48.a) que $\|\vec{F}\| = CV^2 2\pi \int y \cdot \sin^2 \theta dy$ avec

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \text{ et } \sin \theta = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

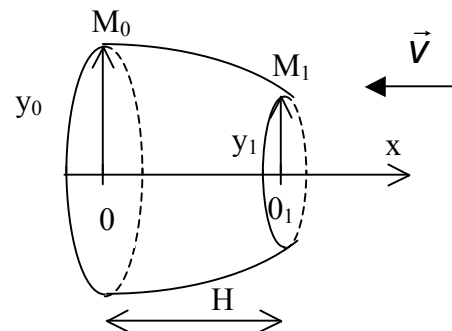
D'où finalement : $\|\vec{F}\| = CV^2 2\pi \int \frac{y \dot{y}^3(t)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} dt$ avec la fonction $f(y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{y \dot{y}^3}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$

b) Pour une base circulaire de rayon $y_0 = R$ donné, et un encombrement H donné, l'allure de la surface cherchée est la suivante :

Figure 18

On peut imaginer que l'on va découper la surface globale en N tranches d'épaisseur élémentaire très faible (N pouvant être rendu aussi grand que l'on veut). Les inconnues sont alors les rayons R_i de ces tranches, le dernier rayon R_N coïncidant avec y_1 . On voit que l'annulation de la dérivée partielle de $\|\vec{F}\|$ par rapport à R_N se ramène

au cas du cône tronqué infiniment fin traité à la question 45.d). Pour la dernière tranche, correspondant à une portion de cône tronqué très plat de faible hauteur, on dispose d'une



condition angulaire permettant de réaliser l'optimum de surface de moindre résistance, à savoir $\theta_m = \frac{\pi}{4}$.

c) Dans la mesure où une surface optimale existe, on montre par analyse dimensionnelle (ou théorème de Vaschy-Buckingham) que le rapport y_1/y_0 est une fonction uniquement du rapport $p = H/R$: $y_1/y_0 = \varphi(p)$.

d) On constate que $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$, ce qui donne une interprétation géométrique du paramètre $q = \cot \theta$, inverse de la pente de la tangente en $M(\theta)$ à la courbe méridienne de la surface.

On en déduit qu'on peut choisir astucieusement le point M_1 correspond à la valeur $q(M_1) = \cot \theta_m = \cot \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$.

e) Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange de ce problème variationnel peut s'écrire par le

couple d'équations :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \end{cases}$$
 en supposant que la courbe méridienne possède sur

l'intervalle $]x_0, x_1[$ une tangente continue. La courbe méridienne (C) est alors entièrement déterminée par une représentation paramétrique avec le paramètre $q \in [1, \infty]$ défini à la question précédente, en exprimant que la courbe passe par M_0 et par M_1 , ce qui définit de façon unique les paramètres H/R , et R_1/R .

D'autres exemples de problèmes de calculs variationnels en physique :

- principe de Fermat en optique
- principe de moindre action et la mécanique analytique de Lagrange
- formalisme canonique de Hamilton
- la phase et le principe de Feynmann en mécanique quantique...