

Electro-osmose : principe et applications

1 – Surface chargée en solution aqueuse.

1.1. Longueur de Bjerrum

1.1.1.

a) $u(r) = e^2/4\pi\epsilon r$

b) $l_B = e^2/4\pi\epsilon k_B T$

c) $l_B = 0,72 \text{ nm}$

d) $d_o = 1/n_o^{1/3} = (1/\mathcal{N}_A)^{1/3} = 11,85 \text{ nm}$.

Cette distance est grande devant l_B , donc l'énergie d'interaction entre deux ions est faible par rapport à l'énergie thermique. On en conclut que la distribution spatiale des ions est dominée par le mouvement brownien, c-à-d en première approximation aléatoire et sans corrélations.

1.1.2. Longueur de Bjerrum pour des ions de valence Z

a) $l_B(Z) = Z^2 e^2/4\pi\epsilon k_B T = Z^2 l_B$

b) $c(Z) = c_o n(Z)/n_o$ avec $n(Z) = 1/l_B^3(Z)$. Soit

$$c(Z) = \frac{10^{-3}}{\mathcal{N}_A Z^6 l_B^3} \quad \text{ou} \quad c(Z) = \frac{c_o}{Z^6} \left(\frac{d_o}{l_B} \right)^3$$

c) $c_1 = 4,4 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$

$c_2 = c_1/2^6 = 6,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$

L'importance des interactions électrostatiques entre ions plus proches voisins augmente beaucoup plus rapidement avec leur valence qu'avec leur concentration.

1.2. Longueur de Debye

1.2.1. Energie d'interaction électrostatique de la sphère chargée avec un ion à la périphérie:
 $E_{el}(r) \sim r^2 n_o e^2 / \epsilon$.

On constate que la longueur de Debye est telle que $E_{el}(l_D) \sim k_B T$.

On en déduit que l_D est l'échelle caractéristique des fluctuations de charge dans la solution.

1.2.2. Pour $c_0 = 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, $l_D = 9,6 \text{ nm}$ (10 nm va bien).

Pour $c_0 = 10^{-5} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, l_D vaut dix fois plus, soit 100nm.

1.2.3. Longueur Debye et de Bjerrum dans l'eau pure

a) $n_0 = 1/8\pi l_B l_D^2$

b) $n_0 = 10^{-pK_e/2} = 8,3 \cdot 10^{-8} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$

c) $l_D = 30 * 100 / \sqrt{8,32} = 1,0 \mu\text{m}$

1.3. Longueur de Gouy

$\vec{E} = \frac{\sigma_o}{\epsilon} \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur normal à la surface pointant vers le liquide

1.3.1.

a) Si l'eau ne contenait aucun ion, le champ dans le liquide serait uniforme et égal à σ_o/ϵ . La longueur de Gouy est donc la distance à la surface pour laquelle le travail d'extraction d'une charge de signe opposé à σ_o est comparable à l'énergie thermique.

b) $\sigma_o = e/2\pi l_G l_B$

1.3.2.

a) $l_G = 14 \text{ nm}$.

b) La distance entre charge est $\sqrt{e/\sigma_o} = 8 \text{ nm}$.

1.4. Potentiel électrostatique au voisinage d'une surface chargée

1.4.1. Il est nécessaire qu'à la distance moyenne entre plus proches voisins l'interaction électrostatique soit faible devant l'énergie thermique : $1/n_+^{1/3} \gg l_B$ et idem pour n_- . Ce qui correspond à $c_o \ll c_1$.

Dans ces conditions on peut considérer que la présence ou non d'un ion au point r ne modifie pas substantiellement la position de ses voisins, et donc que le potentiel crée par les autres ions est assimilable à un potentiel extérieur.

1.4.2. A grande distance de la surface $n_+ = n_- = n_o$.

$$n_+(\vec{r}) = n_o \exp(-eV(\vec{r})/k_B T) \text{ et } n_-(\vec{r}) = n_o \exp(eV(\vec{r})/k_B T)$$

1.4.3.

a) $k_B T/e = 25 \text{ mV}$.

b)

1.4.4.

a) Si les échelles géométriques du système (distance à la paroi du récipient, taille ou courbure de la surface,...) sont grandes par rapport aux échelles physiques relevantes énumérées ci-dessus, ce qui est la cas pour un système macroscopique, le problème est invariant par translation parallèle à la surface.

b)

$$\frac{d^2 \tilde{V}}{dz^2} = \frac{\text{sh} \tilde{V}}{l_D^2} \quad (1)$$

Il faut dimensionner z par l_D .

c) En $z = \infty$ $\tilde{V} = 0$ et donc $d\tilde{V}/dz = 0$
En $z = 0$, $d\tilde{V}/dz = -2/l_G$.

1.4.5.

a) En faisant $\text{sh}\tilde{V} = \tilde{V}$ l'équation du 1.4.4. s'intègre en $\tilde{V}(z) = \tilde{V}_s \exp(-z/l_D)$.
(On élimine l'exponentielle croissante qui diverge à l'infini).

b) $d\tilde{V}/dz = -\tilde{V}_s/l_D = -2/l_G$ donc on trouve que $\tilde{V}_s = 2l_D/l_G$.

c) D'après l'équation (1) la charge du liquide est $\rho(z) = -\epsilon(d^2V/dz^2) = -\epsilon V(z)/l_D^2$. En remplaçant on trouve

$$\rho(z) = -\frac{e}{2\pi l_B l_G l_D} \exp(-z/l_D)$$

La taille caractéristique de la couche de fluide chargée au voisinage de la surface est l_D .

1.4.6.

a) On intègre une première fois (1) en multipliant les deux membres par $d\tilde{V}/dz$

$$\frac{l_D^2}{2} \left(\frac{d\tilde{V}}{dz} \right)^2 = \text{ch}\tilde{V} - 1$$

en utilisant la condition limite en $\tilde{z} = \infty$: $\tilde{V} = 0$ et $d\tilde{V}/dz = 0$

En utilisant la condition limite en $z = 0$ on obtient

$$\frac{2l_D^2}{l_G^2} = 2\text{sh}^2 \frac{\tilde{V}_s}{2}$$

On choisit $\text{sh}(\tilde{V}_s/2) = +l_D/l_G$ car $V(z)$ doit être décroissant au voisinage de la surface.

b) $\tilde{V}_s = 2\text{Argsh}(10/14) = 1,33$ soit $V_s = 33mV$.

La condition de petit potentiel du 1.4.5 n'est pas vérifiée près de la surface.

c) De la première intégration effectuée en a) on obtient

$$l_D \left(\frac{d\tilde{V}}{dz} \right) = -2\text{sh}\tilde{V}/2$$

en prenant la racine négative de sorte à vérifier $d\tilde{V}/dz < 0$ avec $\tilde{V} > 0$ au voisinage de la surface. Soit

$$\int_0^z \frac{d\tilde{V}/2}{\text{sh}\tilde{V}/2} = \ln \left(\text{th} \frac{\tilde{V}}{4} \right) - \ln \left(\text{th} \frac{\tilde{V}_s}{4} \right) = -\frac{z}{l_D}$$

$$\text{th} \frac{\tilde{V}}{4} = \text{th} \frac{\tilde{V}_s}{4} e^{-z/l_D}$$

On peut poser $\delta = \text{th}\tilde{V}_s/4$ ce qui donne $\tilde{V}(z) = 4\text{Arg th}(\delta e^{-z/l_D})$.

d) Lorsque $z \gg l_D$, \tilde{V} devient petit et $\text{th}\tilde{V}/4 \simeq \tilde{V}/4$ soit

$$\tilde{V} = 4\text{th} \frac{\tilde{V}_s}{4} e^{-z/l_D}$$

e) Lorsque $z \gg l_D$ le graphe est une droite de pente $-l_D$. La décroissance du potentiel est exponentielle comme lorsque $|\tilde{V}(z)| \ll 1$, mais le préfacteur n'est plus le potentiel de surface. Ce préfacteur est toujours plus petit que 4, par conséquent le potentiel apparent de la surface lorsque $z > l_D$ est toujours plus petit que 100mV.

f) $\rho(z) = -\epsilon(d^2V/dz^2)$

$$S \int_0^\infty \rho(z) dz = -S\epsilon \left(\frac{dV}{dz} \Big|_\infty - \frac{dV}{dz} \Big|_0 \right) = -S\sigma_0$$

La charge du cylindre est opposée à la charge de surface, la neutralité électrique est respectée.

g) D'après la loi de Boltzmann, la densité en ions la plus importante est celle en ions négatifs au point de potentiel maximum, cad au voisinage de la surface: $n_-(z=0) = n_0 e^{\tilde{V}_s}$. Dans les conditions expérimentales désignées, soit $\tilde{V}_s = 1,33$, cela donne une concentration maximale égale à $3,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, ce qui reste bien inférieur à la concentration c_1 .

2 – Transport au voisinage d'une surface chargée.

2.1. Transport des ions en solution

2.1.1. Le premier terme est le flux diffusif engendré par un gradient de concentration (loi de Fick), D_i est le coefficient de diffusion en m^2/s .

Le second terme est le transport dû au champ électrique.

2.1.2.

a) $\vec{F}_i = -q\vec{\nabla}V$

b) A l'équilibre $J_i(\vec{r}) = \vec{0}$ ce qui s'écrit aussi

$$D_i \vec{\nabla}(\ln n_i) = -qm_i^* \vec{\nabla}V$$

$$n_i = n_{i,0} \exp\left(\frac{-iem_i^* V}{D_i}\right)$$

c) Par identification à la loi de Boltzmann $n_i = n_0 \exp(-ieV/k_B T)$ on obtient $D_i = k_B T m_i^*$

2.1.3. $J_i(\vec{r}) = -m_i^* n_i(\vec{r}) \vec{\nabla} \tilde{\mu}_i(\vec{r})$

2.1.4. $r_H = 1.08 \text{ \AA}$ pour Na^+ et $r_H = 1.05 \text{ \AA}$ pour Cl^-

2.1.5.

a) $\vec{J}_e = e\vec{J}_+ - e\vec{J}_-$

b) $\gamma_0 = 2n_0 e^2 m^* = 2n_0 e^2 / (6\pi\eta r_H)$
 $\gamma_0 = \epsilon k_B T / 6\pi\eta r_H l_D^2$

2.2. Ecoulement électro-osmotique

2.2.1. $V_\infty(x) = -Ex$

2.2.2. Les flux satisfont les équations de conservation $\text{div} \vec{J}_\pm(\vec{r}) = \vec{0}$.

Comme le système est invariant selon x et y , $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$. On en déduit $\partial J_{\pm,z}/\partial z = 0$ et donc $\vec{J}_{\pm} \cdot \vec{e}_z = Cte$.

Or sur la surface le flux normal est nul. Par conséquent $\vec{J}_+ \cdot \vec{e}_z = \vec{J}_- \cdot \vec{e}_z = 0$ dans tout le fluide.

2.2.3. Etude du potentiel dans la solution.

a) D'après la question 2.1.3 le flux est proportionnel au gradient de $\tilde{\mu}$. Par conséquent $\tilde{\mu}$ n'a pas de gradient selon Oz , il ne dépend donc que de x .

b) $\tilde{\mu}_+(x) = +k_B T \ln n_o + eV_{\infty}(x)$ et $\tilde{\mu}_-(x) = k_B T \ln n_o - eV_{\infty}(x)$

c) $\tilde{\mu}_+(x) = k_B T \ln n_+(x, z) + eV(x, z)$ et $\tilde{\mu}_-(x) = k_B T \ln n_-(x, z) - eV(x, z)$. On déduit de ce qui précède que

$$n_+(x, z) = n_o \exp\left(\frac{-e\phi(x, z)}{k_B T}\right)$$

et relation symétrique pour n_- .

2.2.4. Equation différentielle satisfaite par ϕ .

a) La densité de charge est $\rho(x, z) = -2en_o \text{sh}(e\phi/k_B T)$.

Le potentiel V satisfait l'équation de Poisson (1). Or, $\Delta V_{\infty} = 0$. On en déduit que $\Delta V = \Delta\phi$ et donc que ϕ satisfait l'équation de Poisson-Boltzmann

$$\Delta \frac{e\phi}{k_B T} = \frac{\text{sh}(e\phi/k_B T)}{l_D^2}$$

Les conditions aux limites sont :

i) en $z \gg l_D$, ϕ est uniformément nul quelsoit x

ii) en $z = 0$, $\partial\phi/\partial z = \partial V/\partial z = -\sigma_o/\epsilon$ indépendant de x

Comme ces conditions aux limites sont toutes deux invariantes selon x , et que l'eq. de PB ne comporte pas de terme explicitement dépendant de x , ϕ ne peut pas dépendre de x .

b) On est ramené au problème de la section 1 pour ϕ et on en déduit que $\phi(z = 0) = V_s$, ce qui conduit à la relation demandée.

Etude de l'écoulement électro-osmotique

2.2.5. $\vec{f} = \rho \vec{E}$

$$\rho = -\epsilon E (d^2\phi/dz^2)$$

Aussi invariante selon x .

2.2.6. La relation d'incompressibilité donne $\partial v_x/\partial x = 0$. Donc \vec{v} est indépendant de x .

2.2.7. En régime stationnaire le membre de gauche de (NS) s'annule. En projetant sur x

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} - \epsilon E \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

2.2.8.

a) On peut raisonner sur la contrainte tangentielle $\eta \partial v_x/\partial z$ qui doit s'annuler à l'infini en l'absence de force appliquée au fluide selon Ox , ou bien sur le fait que la vitesse ne doit pas diverger à l'infini.

En $z \gg l_D$, $\partial v_x / \partial z = 0$

b) En intégrant une première fois l'équation ci-dessus et en utilisant la condition limite $dv_x/dz = d\phi/dz = 0$ en $z \gg l_D$ on obtient

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{\epsilon E}{\eta} \frac{d\phi}{dz}$$

et en intégrant une deuxième fois

$$v_x(z) = \frac{\epsilon E}{\eta} \phi(z) + Cte$$

2.2.9.

a) $v_x(z) = \frac{\epsilon E}{\eta} (\phi(z) - V_s)$

b) $v_{EO} = -\epsilon V_s E / \eta$

c) $v_x(z) = v_{EO} (1 - \phi(z)/V_s)$.

La distance caractéristique de variation de $v_x(z)$ est la même que celle du potentiel, c'est donc l_D .

Comparaison entre l'écoulement électro-osmotique et l'écoulement de Poiseuille.

2.2.10.

a) $Q_1 = h w v_{EO}$.

b) Le profil de vitesse de l'écoulement osmotique est plat (écoulement "bouchon") tandis que celui de Poiseuille est parabolique.

$$\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| = \frac{h^2}{12\epsilon\zeta} \frac{\Delta P/L}{E}$$

Pour une amplitude donnée des gradients appliqués $\Delta P/L$ et E , le rapport des débits Poiseuille/EO s'effondre comme le carré de la hauteur du canal.

c) $Q = Q_1 + Q_2$ car l'équation de NS dans cette géométrie unidirectionnelle est linéaire, et par conséquent les profils de vitesse s'ajoutent. Par conséquent

$$Q = -\frac{h w \epsilon V_s}{\eta} E + \frac{w h^3}{12\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

2.3. Mesure du potentiel zeta par suivi de courant

2.3.1. La variation d'intensité est un peu moins que 20 nA.

On peut l'attribuer à l'écoulement EO, qui change la composition du fluide contenu dans le capillaire.

2.3.2. $t_{diff} = L^2/D_i$. Je trouve $2 \cdot 10^7$ s.

On en conclut que la diffusion ne joue pas de rôle sur l'échelle de temps considéré.

2.3.3. Il faut supposer ici que $\zeta < 0$ ce qui est le cas pour le verre.

Dans ces conditions la vitesse électro-osmotique a la même direction que l'intensité schématisée. La concentration c_0 progresse dans le capillaire initialement rempli à $0.9 c_0$ avec un front qui avance à la vitesse électro-osmotique v_{EO} . La variation linéaire d'intensité reflète la variation linéaire de conductance du canal due à ce front qui avance à vitesse constante. Lorsque le front arrive à l'extrémité du capillaire sa conductance et donc l'intensité mesurée ne varient plus.

Comme le profil de vitesse est très plat ($r \gg l_D$) et que la diffusion est négligeable, le mélange des deux fluides est négligeable. La rupture de pente brutale est liée à la faible dispersion axiale de la concentration.

2.3.4. La norme de E est quasiment constante car la conductivité des deux fluides est proche.

$$E = 5000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$v_{EO} = L/\Delta t = 0,2/1088 = 0,18 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

On trouve $\zeta = -51 \text{ mV}$.

2.3.5. La charge de surface est négative.

2.3.6. A la sortie du capillaire le fluide se trouve dans un espace "tri-dimensionnel" et se dilue rapidement (d'autant qu'une différence de concentration de 10^{-4} molaire n'est pas complètement négligeable du point de vue de la gravité à l'échelle d'un bécher ce qui entraîne un peu de convection).

Lorsqu'on inverse le signe de la ddp l'intensité du courant varie de façon symétrique avec une décroissance linéaire en temps jusqu'à la valeur initiale.

2.4. Courant d'écoulement

2.4.1. $j_e(z) = \rho(z)v_x(z) = -\gamma z \epsilon \frac{d^2 V}{dz^2}$

2.4.2. On obtient en intégrant par parties $\frac{dI}{dy} = \int_0^\infty j_e(z) dz = -\epsilon \gamma V_s$.

2.4.3.

a) $I_e = -2(w + h)\epsilon \gamma V_s$

b) C'est la force dans la direction x exercée sur une surface d'aire unité perpendiculaire à z , par le milieu situé au-dessus de cette surface.

C'est aussi l'opposé de la force exercée sur ce même élément de surface, par le milieu situé au-dessous.

c) Sur la surface inférieure $df_x = \tau(z = 0)w dx$

d) La force totale s'exerçant sur cette tranche liquide est nulle (puisqu'elle n'accélère pas). Elle se compose sur Ox :

de la force de pression $wh(P(x) - P(x + dx))$,

- des forces exercées par les parois soit $2\tau(0)(w + h)dx$

Le bilan donne : $-wh \frac{dP}{dx} = 2(w + h)\tau(0)$

e)

$$I_e = \frac{wh\epsilon V_s}{\eta} \frac{dP}{dx}$$

2.4.4. On peut prendre la valeur du potentiel trouvé précédemment, $\sim 50\text{mV}$.
On trouve $i_e \sim 0,35 \mu\text{A}$.

2.4.5. Le flux d'ions est la somme du flux convectif donnant lieu au courant d'écoulement, et du flux diffusif (ou de conduction) donné par l'équation (3) et étudié en 2.1.

Pour h suffisamment grand ($h \gg l_D$), le flux de conduction est $-wh\gamma_0 \frac{dV}{dx}$, car on peut négliger les charges supplémentaires qui compensent les charges de surface.

Le courant d'écoulement comprend la contribution de Poiseuille étudiée ci-dessus, et la contribution de l'écoulement électro-osmotique induit par le champ électrique. Cette deuxième contribution est proportionnelle au champ E appliqué, comme le courant de conduction, et ne fait intervenir que la charge du fluide près des surfaces. On peut donc aussi la négliger lorsque h est suffisamment grand.

Par conséquent

$$I = \frac{wh\epsilon V_s}{\eta} \frac{dP}{dx} - wh\gamma_0 \frac{dV}{dx}$$

3 – Conversion d'énergie

3.1. Expression des constantes de couplage

D'après le 2.2.10 $\alpha = h^2/12\eta$ et $\beta = -\epsilon V_s/\eta$.

D'après le 2.4.5 $\beta = -\epsilon V_s/\eta$ et $\gamma = \gamma_0$.

γ est la conductivité de la solution (dans la limite $h \gg l_D$).

3.2. Etude énergétique du générateur équivalent

3.2.1. $U = (\beta/\gamma)\Delta P - IL/\mathcal{A}\gamma$. Donc $e = (\beta/\gamma)\Delta P$ et $r = L/N\gamma\mathcal{A}$.
 r correspond à la résistance électrique des N canaux en parallèles.

3.2.2. La puissance consommée est

$$\mathcal{P}_{meca} = N \times Q\Delta P = \frac{N\mathcal{A}}{L}(\Delta P)^2(\alpha - \beta x)$$

et la puissance électrique récupérée dans le circuit

$$\mathcal{P}_{elec} = N \times (UI) = \frac{N\mathcal{A}}{L}(\Delta P)^2(\beta x - \gamma x^2)$$

3.2.3. La puissance dissipée est

$$\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_{meca} - \mathcal{P}_{elec} = \frac{N\mathcal{A}}{L}(\Delta P)^2(\alpha - 2\beta x + \gamma x^2)$$

On doit avoir $\mathcal{P}_d > 0$ quelle que soit la résistance R (positive) utilisée dans le circuit. Les coefficients α et γ correspondent à une conductance hydraulique et électrique et sont donc positifs. On doit donc avoir $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$ ce qui correspond à $0 \leq y \leq 1$.

3.2.4.

a) $x = (e - rNI)/\Delta P$ et $x = NRI/\Delta P$; soit $x = \beta/\gamma - rx/R$

$$x = \frac{R\beta/\gamma}{R + r}$$

On en déduit que x varie entre 0 et β/γ .

b) On obtient en maximisant \mathcal{P}_{elec} , $x_1 = \beta/2\gamma$ ce qui correspond à $R_1 = r$.

3.3. Etude du rendement

3.3.1. $\lambda = \mathcal{P}_{elec}/\mathcal{P}_{meca}$

$$\lambda = \frac{\beta x - \gamma x^2}{\alpha - \beta x}$$

3.3.2. Le numérateur de $d\lambda/dx$ vaut $\alpha\beta - 2\alpha\gamma x + \beta\gamma x^2$. Les deux valeurs qui annulent la dérivée sont $x_{\pm} = \frac{\alpha}{\beta}(1 \pm \sqrt{1-y})$. On remarque que x_- appartient au domaine de variation $[0, \beta/\gamma]$ mais pas x_+ . λ est croissant de 0 à x_- , décroissant au-delà. Par conséquent le maximum de λ est en

$$x_2 = x_- = (1 - \sqrt{1-y})\alpha/\beta \quad \lambda_m = \lambda(x_2) = \frac{(1 - \sqrt{1-y})^2}{y}$$

3.3.3.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{y}{2-y}$$

3.3.4. $\lambda_m(0,9) = 52\%$

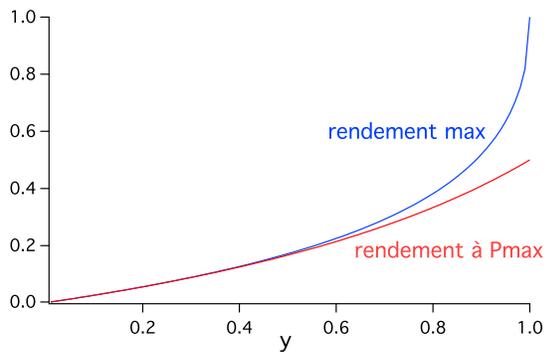


Figure 1: Rendement à pression constante en fonction de $y = \beta^2/\alpha\gamma$. En bleu: rendement maximum, en rouge : rendement lorsque la puissance fournie est maximum, $x = x_1$.

3.4. Densité de puissance

3.4.1. $N\mathcal{A} = \psi S$ et $\Pi = \mathcal{P}_{elec}/S = \psi P_{elec}/N\mathcal{A}$

3.4.2. La densité maximale de puissance fournie est

$$\Pi_m = \psi \frac{\Delta P^2}{L} \frac{\beta^2}{4\gamma}$$

On a donc intérêt à avoir :

- un grand coefficient de couplage β
- une grande perte de charge ΔP
- une petite longueur de canaux
- une conductivité γ aussi faible que possible.

3.5. Dimensionnement

3.5.1.

$$y = 18\tilde{\zeta}^2 \frac{l_D^2 r_H}{h^2 l_B}$$

3.5.2. $\lambda_m = 1,4\%$

$$\Pi_m = 5,8 \text{ W/m}^2$$

Pour améliorer le rendement on pourrait

- i) augmenter le potentiel de surface si on peut
- ii) diminuer le facteur h/l_D , mais l'expression de y utilisée ici n'est valable pour h substantiellement supérieur à l_D
- iii) augmenter r_H , cad prendre des macro-ions monovalents.

3.5.3.

a) $\lambda_m = 3\%$ et $\Pi_m = 12,4 \text{ W/m}^2$

b) On n'a pas tenu compte ici d'un certain nombre de facteurs :

- on a légèrement surestimé β en prenant un profil de vitesse électro-osmotique uniforme dans le canal, cad qu'il faut envisager une correction en $\beta = (\epsilon\zeta/\eta)(1 + o(l_D/h))$
- on a plus largement sous-estimé γ en négligeant 2 effets :
 - i) les contre-ions qui enrichissent le canal en charges mobiles, c'est un effet important mais qui reste proportionnel à r_H . La portion des charges négligées est $2\sigma_o/2en_o h = l_D^2/l_G h$. Il faut s'attendre à une correction en $\gamma_0(1 + o(l_D^2/l_G h))$
 - ii) et finalement le transport des contre-ions par l'écoulement électro-osmotique, cad la contribution au courant d'écoulement que l'on n'a pas prise en compte. Ce transport convectif proportionnel au champ E appliqué donne une contribution indépendante de r_H à la conductance du canal. C'est cet effet qui limite le gain que l'on peut espérer en prenant des ions très peu mobiles.