

# Méthodes variationnelles et symétries

## I. - Introduction aux méthodes variationnelles

### I.1.- Principe de Fermat et applications

1. - Le chemin optique vaut  $\mathcal{L} = nAM + n'MA'$  avec les distances  $AM = \sqrt{x^2 + y_0^2}$  et  $MA' = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}$ , soit

$$\mathcal{L} = n\sqrt{x^2 + y_0^2} + n'\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}.$$

La contrainte  $\partial \mathcal{L} / \partial x = 0$  conduit à l'équation

$$n \frac{x}{AM} - n' \frac{x_0 - x}{MA'} = 0$$

qui n'est autre que la loi de la réfraction  $n \sin i = n' \sin i'$  avec les notations de la figure. Si l'on interprète  $c/n$  comme la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu d'indice  $n$ , le temps de parcours de  $A$  à  $M$  vaut  $nAM/c = (AM)/c$  de sorte que la condition de stationnarité du chemin optique n'est autre que celle de la durée de parcours du rayon lumineux. Enfin, on n'a pas démontré que le point  $M$  sur le dioptre est dans le plan de la figure. Si l'on autorise une coordonnée  $z$  pour ce point, on obtient un chemin optique

$$\mathcal{L} = n\sqrt{x^2 + y_0^2 + z^2} + n'\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2 + z^2}$$

et la condition  $\partial \mathcal{L} / \partial z = 0$  impose alors  $z = 0$ , c'est-à-dire que  $M$  est dans le plan d'incidence.

2. - L'équation de la sphère s'écrit  $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , [soit  $x = (x^2 + y^2 + z^2)/2R$  que l'on itère

$$x = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2R}[y^2 + z^2 + [\frac{1}{2R}(y^2 + z^2)]^2 + \dots] = \frac{y^2 + z^2}{(2R)^2}(1 + O(\varepsilon^4))$$

Il vient :

$$x \simeq \frac{y^2 + z^2}{2R} \quad (1)$$

On en déduit que  $\frac{x}{R}$  est du second ordre en  $\varepsilon$ , ce qui justifie a posteriori que le terme en  $x^2/R^2$  soit négligé dans l'équation de la sphère (1).]

3. - La distance  $AM$  vaut cette fois  $AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(-x_A)^2 + 2x(-x_A) + x^2 + (y - y_A)^2}$  et peut être développée en factorisant  $(-x_A) > 0$  :

$$AM = -x_A \left( 1 + \frac{2x}{-x_A} + \frac{x^2}{(-x_A)^2} + \frac{(y - y_A)^2}{(-x_A)^2} \right)^{1/2} \simeq -x_A \left( 1 + \frac{x}{-x_A} + \frac{x^2}{2(-x_A)^2} + \frac{(y - y_A)^2}{2(-x_A)^2} \right)$$

soit, en négligeant le terme en  $x^2/(-x_A)^2$  au moins d'ordre 4 en  $\varepsilon$ ,

$$AM \simeq -x_A + x + \frac{(y - y_A)^2}{2(-x_A)}.$$

On remplace ensuite  $x$  avec le résultat de la question précédente pour obtenir le chemin optique associé

$$(AM) \simeq -nx_A + n \frac{y^2}{2R} - \frac{n_A}{2} (y - y_A)^2.$$

Pour le chemin optique ( $MA'$ ), le calcul est identique (avec  $x'_A > 0$ ) :

$$(MA') \simeq n'x'_A - n' \frac{y^2}{2R} + \frac{v_{A'}}{2} (y - y_{A'})^2.$$

Le chemin optique total s'écrit donc  $\mathcal{L} = (AM) + (MA')$ . En rassemblant les termes en  $y$  et en  $y^2$  il vient :

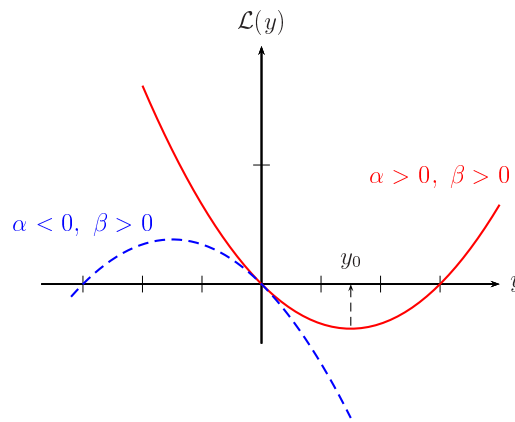
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \frac{n - n'}{R} y^2 + \left( \frac{v_{A'}}{2} - \frac{v_A}{2} \right) y^2 + y (v_A y_A - v_{A'} y_{A'}) - n x_A + n' x_{A'} + \left( \frac{v_{A'} y_{A'}^2}{2} - \frac{v_A y_A^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha y^2 - \beta y + \kappa \end{aligned} \quad (2)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \alpha &= v_{A'} - v_A - \frac{n' - n}{R} \\ \beta &= v_{A'} y_{A'} - v_A y_A \\ \kappa &= n' x_{A'} - n x_A + \frac{1}{2} v_{A'} y_{A'}^2 - \frac{1}{2} v_A y_A^2 \end{aligned}$$

Le chemin optique est extrémal, donc  $\frac{d\mathcal{L}}{dy} = 0$  en  $y_0$  soit  $\alpha y_0 - \beta = 0$ . On en déduit la valeur  $y_0$  du point d'incidence sur le dioptre :

$$y_0 = \frac{\beta}{\alpha}$$



**Figure 1.** Allure du chemin optique dans deux cas de signes des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Si  $\alpha > 0$  la condition correspond à un minimum du chemin optique et si  $\alpha < 0$  la condition correspond à un maximum du chemin optique. Dans le premier cas,  $y_0$  a le signe de  $\beta$  et le signe contraire dans le second cas. Deux cas sont représentés sur la figure.

**4.** - La condition de stigmatisme impose que le chemin optique soit indépendant du trajet suivi par la lumière, donc  $\mathcal{L}$  doit être indépendant de  $y$ . Cela impose donc  $\alpha = \beta = 0$ . La contrainte  $\alpha = 0$  donne la relation de conjugaison du dioptre sphérique :

$$v_{A'} - v_A = \frac{n' - n}{R}.$$

5. - La seconde relation  $\beta = 0$  donne la formule du grandissement :

$$\frac{y_{A'}}{y_A} = \frac{v_A}{v_{A'}}.$$

6. - Avec  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  on a  $|\mathbf{u}|^2 = 1 = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ , soit  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = ds$ ,  $\delta|\mathbf{u}|^2 = 2\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} = 0$  et  $\nabla n = \frac{dn}{dr}$  et

$$\mathcal{L}[s] = \int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}) ds = \int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3)$$

la variation de chemin optique vaut

$$\delta\mathcal{L} = \int \left[ \underbrace{(\delta n(\mathbf{r})) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}}_{\int \delta n(\mathbf{r}) ds = \int \nabla n \cdot \delta \mathbf{r} ds} + \underbrace{n(\mathbf{r}) \delta \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}}_0 + \underbrace{n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \delta(d\mathbf{r})}_{[n(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}]_{s_1}^{s_2} - \int d(n(\mathbf{r}) \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{r}} \right] \quad (4)$$

soit

$$\delta\mathcal{L} = \int [\nabla n ds - d(n\mathbf{u})] \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

d'où l'équation des rayons lumineux

$$\frac{d}{ds}(n(\mathbf{r})\mathbf{u}) = \nabla n(\mathbf{r}) = \frac{d}{ds} \left( n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \quad (5)$$

7. - On pose  $ds = n da$  donc  $\frac{d}{ds} = \frac{1}{n} \frac{d}{da}$  soit  $\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} \frac{d^2 \mathbf{r}}{da^2}$ . Comme  $\frac{1}{2} \nabla n^2 = n \nabla n = n \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)$  on obtient

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{da^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2$$

On peut faire les analogies suivantes entre mécanique et optique géométrique :  $t \rightarrow a$ ,  $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(a)$ ,  $m \rightarrow 1$ ,  $V \rightarrow -\frac{1}{2} n^2$ . La quantité de mouvement devient

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow 1 \frac{d\mathbf{r}}{da} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n\mathbf{u}$$

et le moment cinétique

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r} \times n\mathbf{u} = \mathbf{r} \times n\mathbf{u}$$

8. - On peut traiter la question directement en remarquant que la composante suivant  $z$  de  $n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  se conserve,

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \mathbf{u}_z \right) = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \cdot \mathbf{u}_z = \nabla n \cdot \mathbf{u}_z = 0,$$

soit

$$n(r) \frac{dz}{ds} = \text{const.}$$

De même; la composante suivant  $z$  de  $\mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  se conserve également,

$$\frac{d}{ds} \left( \left[ \mathbf{r} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] \cdot \mathbf{u}_z \right) = 0$$

car  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$  et  $\mathbf{r} \times \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \nabla n$  est également nul car  $n(\mathbf{r}) = n(r)$ , soit

$$\left( n(r) r \mathbf{u}_r \times r \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{u}_\varphi \right) \cdot \mathbf{u}_z = \text{const.}$$

d'où les lois de conservation demandées.

On peut aussi effectuer le calcul plus direct en composantes, en notant qu'en raison de la forme de  $\nabla n$ ,  $\frac{d}{ds} \left( n(r) \frac{dr}{ds} \right)$  n'a pas de composante suivant  $\mathbf{u}_z$  ni suivant  $\mathbf{u}_\varphi$ . Cela donne directement pour la composante  $\mathbf{u}_z$

$$\frac{d}{ds} \left( n(r) \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

Pour la composante selon  $\mathbf{u}_\varphi$  il faut prendre garde à  $d\mathbf{u}_r/ds = (d\varphi/ds)\mathbf{u}_\varphi$  et il vient

$$0 = \frac{dn}{ds} r \frac{d\varphi}{ds} + 2n(r) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + n(r) r \frac{d\varphi}{ds}$$

qui, après multiplication par  $r$ , s'identifie à

$$\frac{d}{ds} \left( n(r) r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0.$$

On peut enfin traiter cette question grâce à l'analogie mécanique. En coordonnées cylindriques  $r, \varphi, z$  et avec une symétrie cylindrique,  $n$  n'est fonction que de  $r$ ,  $n(r)$ , soit  $\nabla n = \frac{dn}{dr} \mathbf{u}_r$ , ce qui entraîne que la force équivalente au problème de mécanique est portée par  $\mathbf{u}_r$ . On en déduit donc en particulier que la composante suivant  $z$  de la "quantité de mouvement"  $n(r) \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  est conservée, soit avec  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$  et  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} \mathbf{u}_r + r \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{u}_\varphi + \frac{dz}{ds} \mathbf{u}_z$ ,

$$n \frac{dz}{ds} = \text{const.} \quad (6)$$

et que la composante suivant  $z$  du "moment cinétique" est nulle (la force  $\mathbf{F} \propto \mathbf{u}_r$ ). Il en découle que dans le problème optique  $\mathbf{r} \times n(r) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \Big|_z$  se conserve,

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{u} \Big|_z = nr^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{const.} \quad (7)$$

La première loi de conservation entraîne  $n \frac{dz}{ds} = \text{const.} = n \sin i$  qui est une constante ; c'est la loi de Descartes.

9. - On peut extraire  $ds/dz$  de (6),  $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{n^2}{\lambda^2}$  puis remplacer  $ds = \sqrt{dr^2 + dz^2}$ , soit

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \quad (8)$$

Pour que le rayon soit guidé, il doit y avoir réflexion totale à l'intérieur de la fibre, donc  $n_2 \leq n_1$ . Lors du passage par  $r = 0$  le rayon a une incidence  $i(0)$ , donc  $\lambda = n_1 \sin i(0) \leq n_1$ . La réflexion totale aura lieu lorsque l'angle vaut  $\pi/2$  soit en  $r = r_{\text{lim.}}$  tel que  $n(r_{\text{lim.}}) \sin \pi/2 = \lambda = n_1$ . Or la réflexion totale doit se produire pour  $r_{\text{lim.}} \leq a/2$ , il faut donc que  $n(r_{\text{lim.}}) = \lambda \geq n_2$ . En conclusion

$$n_2 \leq \lambda \leq n_1.$$

On remplace ensuite  $n$  par son expression donnée dans l'énoncé,

$$n^2 = n_1^2 \left( 1 - 8\Delta \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (9)$$

on trouve une équation :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{8\Delta n_1^2}{a^2 \lambda^2} r^2 = \frac{n_1^2}{\lambda^2} - 1$$

Avec

$$r = r_0 \cos(\Omega z), \quad (10)$$

on reconnaît la somme d'un cosinus au carré et d'un sinus au carré si  $\Omega^2 = \frac{8\Delta n_1^2}{a^2 \lambda^2}$ . On peut aussi le montrer facilement en dérivant l'équation de départ pour obtenir l'équation harmonique

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{8\Delta n_1^2}{a^2 \lambda^2} r = 0$$

de pulsation  $\Omega$ . On a bien une onde guidée avec la pulsation de variation spatiale

$$\Omega = \frac{n_1 \sqrt{8\Delta}}{a\lambda}$$

L'amplitude se déduit de  $\Omega^2 r_0^2 \sin^2 \Omega z + \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \Omega z = \frac{n_1^2}{\lambda^2} - 1$ , elle vaut  $r_0 = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{n_1^2}{\lambda^2} - 1}$ , elle est nulle pour  $\lambda = n_1$  et maximale pour  $\lambda = n_2$ .

**10.** - Le grand théorème de Fermat,  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solution pour  $x, y, z$  dans  $\mathbb{N}$  pour  $n > 2$ , auquel se sont frottés tous les mathématiciens après Fermat, a été démontré par Andrew Wiles en 1994 (avec des aménagements dans les années qui ont suivi).

On connaît également le petit théorème de Fermat, "si  $p$  est un nombre premier et si  $a$  est un entier non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1$  est un multiple de  $p$ ". Utilisé de nos jours en cryptographie.

## I.2.- Méthodes variationnelles en mécanique

**11.** - On effectue le développement de Taylor au premier ordre en  $\epsilon$ ,

$$L(q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \epsilon\eta \frac{\partial L}{\partial q} + \epsilon\dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + O(\epsilon^2).$$

Donc, dans l'intégrale d'action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (11)$$

on intègre par parties

$$S[q + \epsilon\eta] = S[q] + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta \frac{\partial L}{\partial q} + \underbrace{\dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt} \right) dt + O(\epsilon^2)$$

Dans la variation

$$\delta S \equiv S[q + \epsilon\eta] - S[q] = O(\epsilon^2) \quad (12)$$

on annule le terme du premier ordre et il vient

$$\delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt = 0,$$

soit l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (13)$$

**12.** - L'énergie potentielle associée à la surface est proportionnelle à l'aire de la surface,  $E = \gamma A$  avec  $\gamma$  la tension superficielle. Le coût minimum en énergie est donc assuré par la surface minimale. La surface présente une symétrie de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ) et la surface latérale vaut  $A = \int 2\pi r dl$ . On a de plus  $dl = \sqrt{dz^2 + dr^2} = dz \sqrt{1 + r'^2}$ , soit finalement

$$A = \int_{-h}^h 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} dz \quad \text{à minimiser} \quad (14)$$

13. - On effectue les substitutions  $q \rightarrow r, \dot{q} \rightarrow \dot{r}, t \rightarrow z$ . On peut définir la fonction  $L(r, \dot{r}) = r\sqrt{1 + \dot{r}^2}$  et appliquer l'équation d'Euler-Lagrange, soit

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

avec ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= (1 + \dot{r}^2)^{1/2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= r\dot{r}(1 + \dot{r}^2)^{-1/2} \\ \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \dot{r}^2(1 + \dot{r}^2)^{-1/2} + r\ddot{r}(1 + \dot{r}^2)^{-1/2} - r\dot{r}^2\ddot{r}(1 + \dot{r}^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

L'équation d'Euler-Lagrange conduit donc à l'expression :

$$1 + \dot{r}^2 = r\ddot{r} \quad (15)$$

14. - La surface de la caténoïde est ouverte, ainsi la pression à l'"intérieur" de la bulle est la même qu'à l'"extérieur". La relation de Laplace sur les pressions indique que la courbure moyenne (somme des courbures planes principales) de la surface est nulle : le rayon de courbure dans une direction est opposé à celui dans l'autre direction.

Pour chercher la forme générale de la solution, on peut dériver (15), soit  $\dot{r}\ddot{r} = r\ddot{r}$  qui admet pour primitive  $\ln r = \ln \dot{r} + \text{const.}$ , soit  $\dot{r} = \zeta r$  où  $\zeta$  est encore à déterminer. Comme  $\dot{r}$  et  $r$  sont positifs, il en est de même de  $\zeta$  et les solutions sont de la forme  $r = r(0) \text{ch} \sqrt{\zeta} z$  où l'on peut poser  $r(0) = a$ . La relation entre  $a$  et  $\zeta$  se déduit de la loi de Laplace : le rayon de courbure en  $z = 0$  dans le plan perpendiculaire à  $Oz$  vaut  $a$ , dans le plan  $rOz$  il vaut  $1/\dot{r}(0) = 1/a\zeta$  de sorte que pour trouver une courbure moyenne nulle il faut imposer  $a = 1/a\zeta$  d'où la solution  $r(z) = a \text{ch} \left(\frac{z}{a}\right)$

On peut aussi se contenter d'observer que l'identité  $1 + \text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x$  prouve que la solution  $r = a \text{ch} \left(\frac{z}{a}\right)$  convient. On trouve l'équation de la chaînette qui traduit l'équilibre d'une chaîne fixée à ses deux extrémités dans le champ de pesanteur.

15. - Avec

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (16)$$

et

$$H = p\dot{q} - L \quad (17)$$

soit  $\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = 0 = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . Les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{dp}{dt} = -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \end{aligned}$$

16. - Si l'action est de la forme

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt [K(\dot{q}) - V(q)]. \quad (18)$$

alors  $L = K - V$ , soit

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = F$$

(en fait  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_q = F_q$ ).  
De même,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = m \frac{d^2 q}{dt^2}$$

d'où l'équation du mouvement de Newton  $m \frac{d^2 q}{dt^2} = F_q$ .  
 $H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - K + V = K + V$ , c'est l'énergie totale du système conservatif.

17. - Si le lagrangien est indépendant de la coordonnée  $q$ ,  $L(q, \dot{q}, t) = L(\dot{q}, t)$ . On a  $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$  de sorte que  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$ , soit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p = \text{const.}$$

C'est le cas par exemple de la particule libre.

18. - Si  $L$  est indépendant du temps,  $L(q, \dot{q}, t) = L(\dot{q}, q)$ , la quantité

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}}_{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{d}{dt}(p\dot{q})}$

conduit à

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}(p\dot{q}) = -\frac{dH}{dt}$$

soit  $H = \text{const.}$ , d'où la conservation de l'énergie totale.

19. - Dans le cas de la fibre à gradient d'indice le lagrangien avait la forme (issue de l'analogie mécanique)  $L = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}n^2\right)$ , ce qui donne, avec  $ds = nda$ ,

$$L = \frac{1}{2} n^2(r) \left[ \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + 1 \right],$$

les deux lois de conservation proviennent donc de ce que ce lagrangien effectif est indépendant des coordonnées  $z$  et  $\varphi$  en coordonnées cylindriques.

20. - A partir de

$$L = \frac{1}{2} m \sum_i v_i^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + e \sum_i A_i(\mathbf{r}, t) v_i \quad (19)$$

on forme les quantités

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i + e A_i$$

$$H = \sum_i p_i v_i - L = \frac{1}{2m} \sum_i (m v_i)^2 + e\phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \quad (20)$$

21. - Si  $H_{\text{libre}} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_{\text{libre}}^2$  alors

$$H_{\text{libre}} \rightarrow H - e\phi \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{\text{libre}} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (21)$$

donne l'équation

$$H - e\phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$$

22. - Lorsque l'on effectue la transformation

$$L' = L + e \frac{d\alpha}{dt} \quad (22)$$

avec

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha \quad (23)$$

il vient

$$L' = L + e(\partial_t \alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha),$$

l'action devient

$$S' = \int_1^2 L dt + \underbrace{e(\alpha(2) - \alpha(1))}_{\text{indpdt du chemin}}$$

et décrit la même physique car la variation de  $S'$  redonne les mêmes équations que la variation de  $S$ . On peut aussi écrire les équations de Lagrange en termes du lagrangien modifié. Il apparaît dans  $\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}}$  et dans  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}}$  les mêmes termes en  $e\partial_t \nabla \alpha + e\mathbf{v} \nabla^2 \alpha$  qui par conséquent se simplifient et laissent les termes impliquant le lagrangien initial. Les équations du mouvement déduites de  $L$  et de  $L'$  sont ainsi les mêmes.

23. - En particulier, si  $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$ , alors  $L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi - \partial_t \alpha - (\mathbf{A} + \nabla \alpha) \cdot \mathbf{v})$  d'où les transformations de jauge des potentiels données dans l'énoncé,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \alpha, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \alpha, \quad (24)$$

Pour les champs électrique et magnétique on obtient les propriétés

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \partial_t \mathbf{A}' = -\nabla(\phi - \partial_t \alpha) - \partial_t(\mathbf{A} + \nabla \alpha) = \mathbf{E}$$

et

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \alpha) = \mathbf{B}$$

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  (qui déterminent la force agissant sur la charge) sont invariants de jauge et l'équation de la dynamique est la même dans les deux jauges.

## II. - Électromagnétisme et techniques variationnelles

### II.1.- Capacité d'un condensateur cylindrique

24. - Symétrie de rotation cylindrique et invariance par translation suivant  $z$ .

25. - Avec

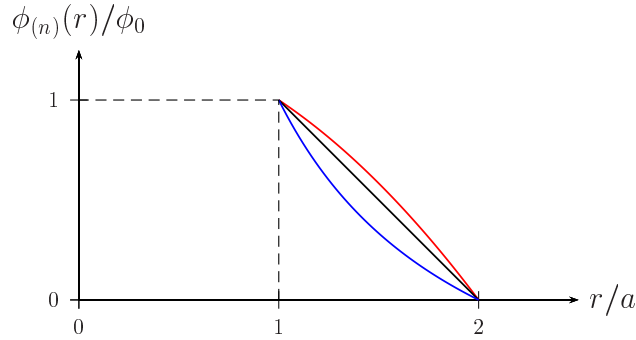
$$\phi_{(n)}(r) = \phi_0 = A_1 r^n + A_2 \quad (25)$$

et les conditions aux limites  $\phi_{(n)}(a) = \phi_0 = A_1 a^n + A_2$  et  $\phi_{(n)}(2a) = 0 = A_1 2^n a^n + A_2$ , on obtient les constantes

$$A_1 = \phi_0 \frac{a^{-n}}{1 - 2^n}, \quad A_2 = -\phi_0 \frac{2^n}{1 - 2^n}, \quad \phi_{(n)}(r) = \frac{\phi_0}{1 - 2^n} ((r/a)^n - 2^n)$$

26. - Le champ électrique vaut  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , la densité d'énergie électrostatique  $u^{\text{es}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$ , l'énergie totale est obtenue par intégration sur l'espace, soit par unité de hauteur  $U^{\text{es}}/h = \int_a^{2a} 2\pi r dr u^{\text{es}}$ . (le





**Figure 2.** Allure des potentiels d'essai obéissant aux conditions aux limites (en bleu,  $n = -1$  et en rouge,  $n = 2$ ).

champ est nul hors des armatures du condensateur parfait) et vaut  $\frac{1}{2}C\phi_0^2$  où  $C$  est la capacité par unité de hauteur et  $\phi_0$  la différence de potentiel entre les armatures. On obtient

$$\mathbf{E}_{(n)} = -\frac{\phi_0}{1-2^n} \frac{nr^{n-1}}{a^n} \mathbf{u}_r$$

d'où la densité d'énergie

$$u_{(n)}^{\text{es.}}(r) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\phi_0^2}{(1-2^n)^2} \frac{n^2 r^{2n-2}}{a^{2n}}$$

soit par unité de longueur  $h$ ,

$$U_{(n)}^{\text{es.}}/h = 2\pi \int_a^{2a} u_{(n)}^{\text{es.}}(r) r dr = \frac{1}{2} \pi \varepsilon_0 n \frac{2^{2n}-1}{(2^n-1)^2} \phi_0^2 = \frac{1}{2} C_{(n)} \phi_0^2,$$

$$C_{(n)} = \pi \varepsilon_0 n \frac{2^{2n}-1}{(2^n-1)^2} = \pi \varepsilon_0 n \frac{2^n+1}{2^n-1}$$

**27.** - Les valeurs numériques de  $C_{(n)}/2\pi\varepsilon_0$  pour  $n = -3, -2, -1, 1, 2, 3$  sont respectivement 1.929, 1.667, 1.500, 1.500, 1.667, 1.929.

**28.** - La capacité présente vraisemblablement un minimum entre  $n = -1$  et 1. Le potentiel réel varie en logarithme de la distance. Il n'est pas décrit par la fonction d'essai, mais donnerait probablement un minimum pour l'énergie électrostatique, et donc pour la capacité variationnelle.

**29.** - On utilise le théorème de Gauss  $2\pi r h E(r) = 2\pi a h \sigma / \varepsilon_0$  où  $\sigma$  est telle que  $Q = 2\pi a h \sigma$ . Soit  $E(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}$ . Le potentiel s'en déduit  $\phi(r) = -\int E(r) dr = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$ . Les conditions aux limites fixent  $r_0 = 2a$  et  $\sigma a / \varepsilon_0 = \phi_0 \ln 2$  soit finalement

$$E(r) = \frac{\phi_0}{\ln 2} \frac{1}{r}, \quad \phi(r) = -\frac{\phi_0}{\ln 2} \ln \frac{r}{2a}$$

**30.** - Le calcul donne

$$U^{\text{es.}}/h = \frac{\pi \varepsilon_0 \phi_0^2}{\ln 2}$$

**31.** - Par identification on obtient

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln 2}$$

On trouve en particulier la valeur numérique de  $C/2\pi\epsilon_0 = 1.443$  effectivement inférieure aux valeurs d'essai calculées précédemment. On constate empiriquement que l'énergie (et donc la capacité) réelle est plus faible que les valeurs d'essai.

32. - Avec  $U_{\text{es.}} = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 |\mathbf{E}(r)|^2 2\pi h r dr = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 2\pi h r dr$  comme analogue d'une action, le principe variationnel  $\delta U_{\text{es.}} = 0$  pour des fonctions d'essai  $\phi(r)$  doit redonner l'équation de Laplace pour le potentiel ou l'équation de Maxwell associée pour le champ électrique comme équation du mouvement.

## II.2.- Forme variationnelle de l'électromagnétisme

33. - Les équations avec sources (équations du mouvement) s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j}$$

34. - Les équations sans sources (équations constitutives) sont

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La seconde équation permet d'écrire  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  car  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  est alors automatique. La première équation s'écrit alors  $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$ , soit  $-\nabla \phi = \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}$  car  $\nabla \times (-\nabla \phi) = 0$  est automatiquement satisfaite, donc  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}$ .

35. -

Les équations avec sources s'écrivent en régime statique en fonction des potentiels sous la forme

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi) = \rho/\epsilon_0, \quad \text{soit} \quad \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{soit} \quad \nabla^2 \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

en utilisant la jauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

36. -

Dans l'équation proposée dans l'énoncé

$$L^{\text{es.}}[\phi] = 2\pi h \int_0^\infty \left[ \left( \frac{1}{2}\epsilon_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \rho(r)\phi(r) \right) r \right] dr. \quad (26)$$

on peut effectuer les analogies suivantes avec l'action d'un problème de mécanique du point :

mécanique	équation (26)
$t$	$r$
$q$	$\phi$
$\dot{q}$	$\partial \phi / \partial r$
$K$	$\frac{1}{2}\epsilon_0 r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2$
$V$	$\rho r \phi$

Le préfacteur  $2\pi h$  est non pertinent pour les équations du mouvement. L'équation d'Euler-Lagrange permet alors d'écrire

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\partial}{\partial(\partial\phi/\partial r)} \frac{1}{2} \varepsilon_0 r \left( \frac{\partial\phi}{\partial r} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} (\rho r \phi) = 0$$

soit, tous calculs faits et en passant à des dérivées "droites",

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Il s'agit de l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique en symétrie cylindrique.

**37. -**

On procède à des analogies similaires avec la forme

$$L^{\text{mag}}[A_z] = 2\pi h \int_0^\infty \left[ \left( \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} \right)^2 - j_z(r) A_z(r) \right) r \right] dr. \quad (27)$$

et l'action d'un problème de mécanique. Cette fois le rôle de  $q$  est joué par la composante  $A_z$  du potentiel vecteur et il vient directement l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur en symétrie cylindrique :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_z$$

**38. -**

La première solution exacte des équations d'Einstein de la relativité générale est due à Schwarzschild. Il s'agit de la solution pour le champ de gravitation statique à symétrie sphérique conduisant notamment au rayon de Schwarzschild qui définit les trous noirs.

**39. -**

L'équation (26) est un cas particulier de la forme proposée dans l'énoncé

$$S_{\text{Schw.}} = \int_{\Omega} dt d^3r \mathcal{L}_{\text{Schw.}}(\phi, \mathbf{A}) \quad (28)$$

avec la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_{\text{Schw.}}(\phi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (|\mathbf{E}|^2 - c^2 |\mathbf{B}|^2) - \rho \phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (29)$$

dans le cas d'un problème purement électrostatique à symétrie cylindrique. S'agissant d'une situation statique, il n'y a en particulier pas d'intégration sur le temps dans (26) qui est un lagrangien. L'intégration sur le temps comme dans (28) définirait une action. De même, (27) est au signe près un cas particulier de même symétrie pour un problème purement magnétostatique. La combinaison des deux équations, avec un signe  $-$ , donne l'action de Schwarzschild dans le cas général. Le signe  $-$  peut paraître surprenant a priori, notamment avec la différence entre énergie électrique et énergie magnétique, mais il est nécessaire pour assurer l'invariance de Lorentz de l'action. Les équations du mouvement doivent être invariantes par transformation de Lorentz (de même forme dans deux référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre). L'élément de volume  $dt d^3r$  possède cette propriété car les durées et longueurs longitudinales subissent des facteurs de transformation qui se compensent par transformation de Lorentz alors que les longueurs transverses sont inchangées. La contrainte se reporte donc sur la densité lagrangienne qui doit être un scalaire de Lorentz, ce qui est le cas de la densité proposée. En effet, en raisonnant par exemple avec les sources, qui sont représentées en relativité restreinte par un 4-vecteur  $(\rho c, \mathbf{j})$  et le potentiel par  $(\phi/c, \mathbf{A})$ , on note que l'invariant de Lorentz associé est de la forme  $\rho \phi - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ , avec des signes conformes à ceux de l'action (28-29). De même pour la partie en  $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2$ , elle est conforme à un invariant de Lorentz que l'on peut former avec le tenseur de Faraday en relativité.

40. -

On part de

$$\mathcal{L}_{\text{Schw.}}(\phi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (|\mathbf{E}|^2 - c^2 |\mathbf{B}|^2) - \rho \phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$$

dans lequel on effectue les substitutions

$$\phi \rightarrow \phi - \partial_t \alpha,$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \alpha.$$

L'action est donc changée en

$$S \rightarrow S + \int_{\Omega} dt d^3r (\rho \partial_t \alpha + \mathbf{j} \cdot \nabla \alpha).$$

Si l'on exige que la variation soit nulle, on trouve par intégration par parties

$$0 = \text{termes de bords} - \int_{\Omega} dt d^3r (\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}) \alpha,$$

soit, pour que cette équation soit satisfaite pour une fonction  $\alpha(\mathbf{r}, t)$  arbitraire,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

où l'on reconnaît l'équation de conservation de la charge électrique. Cette équation, satisfaite en électromagnétisme dès que les équations de Maxwell sont elles-mêmes satisfaites, apparaît ici comme une conséquence d'une symétrie fondamentale, l'invariance de jauge de la théorie.

### III. - Symétrie de jauge en mécanique quantique

#### III.1.- Changement de jauge en mécanique quantique

41. -

Avec la forme des opérateurs hamiltonien  $\hat{H}$  et impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$ ,

$$H \equiv i\hbar \partial_t, \quad \hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar \nabla, \quad (30)$$

l'équation de Schrödinger dépendant du temps pour une particule libre s'écrit

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla)^2 \psi$$

et en utilisant les substitutions (21) on a  $i\hbar \partial_t \rightarrow i\hbar \partial_t - e\phi$  et  $-i\hbar \nabla \rightarrow -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}$  pour les dérivées temporelle et spatiale, et l'équation de Schrödinger devient directement

$$i\hbar \mathcal{D}_t \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \mathcal{D})^2 \psi, \quad (31)$$

avec les définitions de l'énoncé

$$i\hbar \mathcal{D}_t \equiv i\hbar \partial_t - e\phi, \quad -i\hbar \mathcal{D} \equiv -i\hbar \nabla - e\mathbf{A}. \quad (32)$$

pour les dérivées covariantes.

42. - On peut chercher la condition que doivent satisfaire les potentiels par transformation de jauge pour que la dérivée covariante de la fonction d'onde obéisse à la même loi de transformation que la fonction d'onde elle-même. Avec

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{ie\alpha(\mathbf{r}, t)/\hbar} \psi(\mathbf{r}, t) \equiv G(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (33)$$

on forme

$$i\hbar\mathcal{D}'_t\psi' = (i\hbar\partial_t - e\phi')\psi' = i\hbar(\partial_t G)\psi + i\hbar G(\partial_t\psi) - e\phi'G\psi$$

que l'on compare à

$$i\hbar G\mathcal{D}_t\psi = i\hbar G\partial_t\psi - eG\phi\psi.$$

L'égalité impose  $e\phi'G\psi = eG\phi\psi + i\frac{\hbar}{e}\partial_t G\psi$ , soit, avec  $G^\dagger = G^*$ , l'adjoint de  $G$ ,

$$\phi' = G\phi G^\dagger + i\frac{\hbar}{e}(\partial_t G)G^\dagger = \phi - \partial_t\alpha$$

On procède de la même manière avec les dérivées spatiales, ce qui implique cette fois

$$\mathbf{A}' = G\mathbf{A}G^\dagger - i\frac{\hbar}{e}(\nabla G)G^\dagger = \mathbf{A} + \nabla\alpha$$

Cela démontre que

$$i\hbar\mathcal{D}_t\psi \rightarrow i\hbar\mathcal{D}'_t\psi' = i\hbar G\mathcal{D}_t\psi, \quad -i\hbar\mathcal{D}\psi \rightarrow -i\hbar\mathcal{D}'\psi' = -i\hbar G\mathcal{D}\psi \quad (34)$$

à condition d'imposer les lois de transformation

$$\phi' = \phi - \partial_t\alpha, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha. \quad (35)$$

On peut aussi se contenter d'admettre les transformations des potentiels indiqués dans l'énoncé pour vérifier que la dérivée covariante de la fonction d'onde obéit bien à la même loi de transformation que la fonction d'onde.

**43.** -

Si  $\psi$  est une solution sous champ, i.e. en présence de  $\phi$  et  $\mathbf{A}$ , alors  $\psi'$  est associée aux potentiels  $\phi' = \phi - \partial_t\alpha$  et  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha$ , donc, si la fonction  $\alpha$  est sans singularité, aux champs  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \nabla \times (\nabla\alpha) = \mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \nabla(-\partial_t\alpha) - \partial_t(\nabla\alpha) = \mathbf{E}$  et il s'agit bien du même problème physique. [On peut noter que si en revanche  $\alpha$  est singulière, alors par exemple  $\oint \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint \nabla\alpha \cdot d\mathbf{l} = \Phi + \oint d\alpha \neq 0$ , soit un flux de  $\mathbf{B}'$  différent de celui de  $\mathbf{B}$  ! Il s'agit alors d'un problème physique différent.]

**44.** -

On développe l'équation (31) pour obtenir (la jauge de Coulomb permet de faire commuter  $-i\hbar\nabla$  et  $\mathbf{A}$ )

$$i\hbar\partial_t\psi - e\phi\psi = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2\psi + 2ie\hbar\mathbf{A} \cdot \nabla\psi + e^2\mathbf{A}^2\psi)$$

et l'équation complexe conjuguée

$$-i\hbar\partial_t\psi^* - e\phi\psi^* = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2\psi^* - 2ie\hbar\mathbf{A} \cdot \nabla\psi^* + e^2\mathbf{A}^2\psi^*)$$

On retire la seconde multipliée par  $\psi$  de la première de ces équations multipliée par  $\psi^*$  pour former

$$i\hbar\partial_t(\psi^*\psi) = \frac{1}{2m} \left[ \underbrace{-\hbar^2\psi^*\nabla^2\psi + \hbar^2(\nabla^2\psi^*)\psi}_{-\hbar^2\nabla(\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\psi)} + 2ie\hbar\mathbf{A} \underbrace{(\psi^*\nabla\psi + (\nabla\psi^*)\psi)}_{\nabla(\psi^*\psi)} \right]$$

Il vient

$$e \left[ \partial_t(\psi^*\psi) + \nabla \cdot \left( \frac{-i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\psi) - \frac{e}{m}\mathbf{A}\psi^*\psi \right) \right] = 0$$

Le terme entre crochets représente l'équation de conservation de la probabilité de présence sous champ électromagnétique en mécanique quantique. Les densités de charge et de courant sont simplement multipliées par  $e$ . On obtient bien

$$\partial_t\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (36)$$

avec

$$\begin{aligned}\rho &= e\psi^*\psi \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_{\text{para.}} + \mathbf{j}_{\text{dia.}}\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{j}_{\text{para.}} = \frac{-ie\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (37)$$

$$\mathbf{j}_{\text{dia.}} = -\frac{e^2}{m}\mathbf{A}\psi^*\psi. \quad (38)$$

45. -

La densité de courant diamagnétique est très clairement non invariante de jauge, puisqu'elle est proportionnelle à  $\mathbf{A}$ , lui-même dépendant de la jauge choisie :

$$\mathbf{j}_{\text{dia.}} \rightarrow \mathbf{j}_{\text{dia.}} - \frac{e^2}{m}(\nabla\alpha)\psi^*\psi$$

La densité paramagnétique n'est pas non plus invariante de jauge. Lorsque  $\psi$  est changée en  $G\psi$ , elle devient

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{\text{para.}} &\rightarrow \frac{-ie\hbar}{2m}(G^\dagger\psi^*(\nabla G\psi) - G\psi\nabla(G^\dagger\psi)) \\ &= \mathbf{j}_{\text{para.}} - \frac{ie\hbar}{2m}\underbrace{(G^\dagger\nabla G - G\nabla G^\dagger)}_{\frac{2ie}{\hbar}\nabla\alpha} \\ &= \mathbf{j}_{\text{para.}} + \frac{e^2}{m}(\nabla\alpha)\psi^*\psi\end{aligned}$$

ce qui compense exactement la transformation du courant diamagnétique de sorte que **la densité de courant totale est invariante de jauge**. On en déduit que les contributions respectives des deux formes de courant dépendent du choix de jauge et ne sont donc pas associées à un élément de réalité intrinsèque. On note aussi l'invariance de jauge de la densité de charge  $\rho$ , ce qui entraîne plus directement que le courant total respecte également cette symétrie.

---

### III.2.- Courants persistants dans un anneau mésoscopique

46. -

$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}B\mathbf{r}u_\varphi$  et en particulier  $A_\varphi(a) = \frac{1}{2}Ba = \frac{\Phi}{2\pi a}$ .

On peut aussi établir le même résultat à l'aide du théorème de Stokes.

47. -

Avec  $\frac{1}{2}|e_e|Ba = \frac{\hbar}{a}\frac{\Phi}{\Phi_0}$ , et la forme de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( -\frac{i\hbar}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e_e A_\varphi \right)^2, \quad (39)$$

$\hat{H}\psi = E\psi$  conduit à

$$\frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{a^2} \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \psi(\varphi) = E\psi(\varphi)$$

La fonction d'onde  $\psi(\varphi)$  est a priori simplement valuée (périodique sur l'anneau),  $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ .

48. -

On résoud tout d'abord l'équation du premier ordre

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\psi = \text{scalaire} \times \psi,$$

soit, en posant la valeur propre sous la forme  $\frac{\hbar}{a}\ell$  où  $\ell$  est un scalaire sans dimension a priori réel, on trouve  $\psi_\ell(\varphi) = Ae^{i\ell\varphi}$ .

La contrainte de périodicité impose  $\ell \in \mathbb{Z}$  et la normation de  $\psi$  demande  $A = (2\pi a)^{-1/2}$  (en choisissant la détermination réelle positive), soit

$$\psi_\ell(\varphi) = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\ell\varphi}$$

Ces fonctions sont également fonctions propres de  $\hat{H}$ . Les valeurs propres, indicées par le même nombre quantique  $\ell$  s'en déduisent directement par action de  $\hat{H}$ ,

$$E_\ell(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left(\ell + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \quad (40)$$

Elles dépendent du champ magnétique appliqué par la combinaison  $\Phi/\Phi_0$ .

49. -

Le spectre des valeurs de  $E_\ell$  est positif. Les énergies s'annulent pour  $\Phi/\Phi_0 = \ell \in \mathbb{Z}$ . On obtient donc une série de paraboles tangentes à l'axe des abscisses décalées les unes des autres par des valeurs entières de  $\Phi/\Phi_0$ .

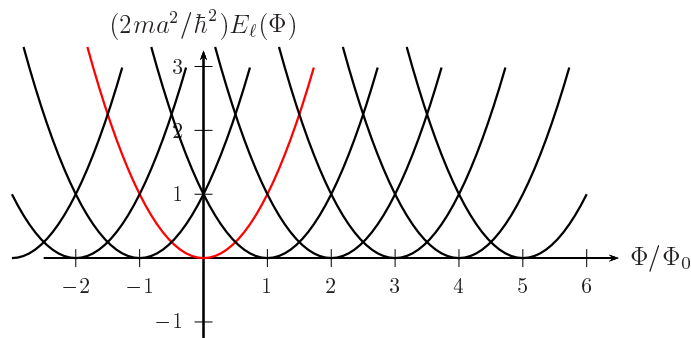


Figure 3. Spectre d'un électron se déplaçant librement sur un anneau en fonction du flux du champ magnétique appliqué.

50. -

L'expression de  $E_\ell$  montre directement que le spectre est invariant par changement de sens du champ (le changement simultané  $\Phi \rightarrow -\Phi$  et  $\ell \rightarrow -\ell$  laisse les niveaux d'énergie inchangés). Par ailleurs on retrouve une valeur de  $E_\ell(\Phi/\Phi_0)$  donnée en translatant  $\ell$  de  $n \in \mathbb{Z}$  à condition de changer également  $\Phi$  en  $\Phi - n\Phi_0$ ,  $E_{\ell+n}(\Phi/\Phi_0 - n) = E_\ell(\Phi/\Phi_0)$ . Le spectre complet est donc inchangé si le champ est modifié d'un nombre entier de quanta de flux.

51. -

On forme  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha = \partial_r\alpha\mathbf{u}_r + \left(\frac{1}{2}Br + \frac{1}{r}\partial_\varphi\alpha\right)\mathbf{u}_\varphi$  où l'on cherche à annuler la composante orthoradiale grâce au choix

$$\alpha(r, \varphi) = -\frac{1}{2}Br^2\varphi$$

Il vient alors

$$\mathbf{A}' = -Br\varphi\mathbf{u}_r$$

c'est-à-dire une composante multivaluée qui ne retrouve pas sa valeur initiale après avoir effectué un tour autour de l'anneau.

52. - Le calcul le long d'un contour circulaire de rayon  $a$  donne évidemment dans la jauge primée

$$\int_0^{2\pi} A'_\varphi(a, \varphi) a d\varphi = 0,$$

ce qui devrait signifier que le champ magnétique (son flux en tout cas) a totalement disparu du problème. La difficulté vient de la composante multivaluée  $A'_r$  qui nécessite de contourner la branche de coupure (ici le demi-axe réel positif). Le long du contour indiqué dans l'énoncé on a

$$\oint_{\cup\gamma} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{l} = \int_a^0 A'_r(r, \varphi = 0) dr - \int_0^a A'_r(r, \varphi = 2\pi) dr = \frac{1}{2} B a^2 2\pi = \Phi$$

et on retrouve la totalité du flux de  $\mathbf{B}$ . Les deux jauges décrivent bien la même physique.

53. -

On a immédiatement  $\psi'(\varphi) = e^{i\frac{e}{\hbar} a(a, \varphi)} \psi(\varphi) = \psi(\varphi) e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0} \varphi}$  [attention,  $\Phi_0 = (2\pi\hbar/(-e_e))$ ] qui obéit aux conditions aux limites suivantes :

$$\psi'(\varphi + 2\pi) = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}(\varphi + 2\pi)} \underbrace{\psi(\varphi + 2\pi)}_{\psi(\varphi) = e^{-i\frac{\Phi}{\Phi_0}\varphi} \psi'(\varphi)} = e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}} \psi'(\varphi)$$

c'est-à-dire des conditions aux limites modifiées.

54. -

Dans la nouvelle jauge, l'hamiltonien possède une propriété remarquable, puisqu'il se réduit au terme d'énergie cinétique sans champ car le potentiel vecteur n'a plus de composante orthoradiale,

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} \left( -\frac{i\hbar}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2$$

55. -

Les solutions s'obtiennent immédiatement comme dans la partie précédente, par exemple en résolvant l'équation du premier ordre associée,

$$\psi'_\ell = (2\pi a)^{-1/2} e^{i\kappa_\ell \varphi}, \quad E'_\ell = \frac{\hbar^2 \kappa_\ell^2}{2ma^2}, \quad \kappa_\ell - \Phi/\Phi_0 = \ell \in \mathbb{Z}$$

ce qui redonne bien  $E'_\ell = E_\ell$  et  $\psi'_\ell(\varphi) = e^{i\frac{\Phi}{\Phi_0}\varphi} (2\pi a)^{-1/2} e^{i\ell\varphi}$ .

56. -

Dans la jauge initiale on trouve (avec ici  $\nabla\psi = \frac{1}{a}\partial_\varphi\psi\mathbf{u}_\varphi$  et  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/(-e_e)$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{para.}} &= \frac{e_e\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \ell \mathbf{u}_\varphi = -\frac{|e_e|\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \ell \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{j}_{\text{dia.}} &= \frac{e_e\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \frac{\Phi}{\Phi_0} \mathbf{u}_\varphi = -\frac{|e_e|\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \frac{\Phi}{\Phi_0} \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

alors que dans la jauge prime on a

$$\begin{aligned} \mathbf{j}'_{\text{para.}} &= \frac{e_e\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \kappa_\ell \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{j}'_{\text{dia.}} &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve bien le fait que les contributions paramagnétique et diamagnétique sont dépendantes de la jauge, mais le courant total, lui, est indépendant du choix de jauge puisqu'on trouve la même valeur dans les deux jauges.



57. - On effectue le calcul

$$-\frac{dE_\ell}{d\Phi} = -\frac{d}{d\Phi} \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left( \ell + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\Phi_0} \left( \ell + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

On trouve le même résultat que le courant total calculé à la question précédente,  $\frac{-|e_e|\hbar}{ma} \frac{1}{2\pi a} \left( \ell + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$ . Ce résultat s'interprète simplement en notant que la variation d'énergie  $dE$  pendant un temps  $dt$  due à l'introduction d'un flux  $d\Phi$  dans le circuit vaut  $dE = f.e.m \text{ d'induction} \times \text{courant} \times dt = -id\Phi$  d'où l'expression  $i = -dE/d\Phi$  (et à une dimension spatiale, courant et densité de courant se confondent).

58. -

A  $\Phi/\Phi_0$  fixé (ici  $0 \leq \Phi/\Phi_0 \leq 1/2$ ), les niveaux d'énergie se succèdent dans l'ordre  $E_0$  (pente positive),  $E_1$  (pente négative),  $E_{-1}$  (pente positive),  $E_2$  (pente négative), etc. Le signe du courant est donné par l'opposé de la pente et donc successivement négatif puis positif.

L'ordre des niveaux et des courants associés est donné par

$$\begin{aligned} p=0 \quad \ell=0 \quad j_0 &= -\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ p=1 \quad \ell=-1 \quad j_1 &= +\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ p=2 \quad \ell=1 \quad j_2 &= -\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( 1 + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ p=3 \quad \ell=-2 \quad j_3 &= +\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( 2 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ p=4 \quad \ell=2 \quad j_4 &= -\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( 2 + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ p=5 \quad \ell=-3 \quad j_5 &= +\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( 3 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \end{aligned}$$

soit  $p = 2\ell = 2k$  si  $\ell \geq 0$  et  $p = -(2\ell + 1) = 2k + 1$  si  $\ell < 0$ , d'où

$$j_{2k} = -\frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( k + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad p = 2k \quad (41)$$

$$j_{2k+1} = \frac{|e_e|\hbar}{2\pi ma^2} \left( k + 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad p = 2k + 1 \quad (42)$$

59. -

Les électrons sont des fermions, on ne peut donc en placer qu'un au maximum par état quantique. A température nulle, les niveaux sont occupés en partant de l'état fondamental et comme on néglige le spin ici, il y a un seul électron par état orbital. Pour obtenir le courant total, il suffit donc de sommer les contributions au courant dans l'ordre des niveaux, soit

$$\left[ \underbrace{-x}_{p=0} + \underbrace{1-x}_{p=1} + \underbrace{-1-x}_{p=2} + \underbrace{2-x}_{p=3} + \underbrace{-2-x}_{p=4} + \dots \right]$$

avec  $x = \Phi/\Phi_0$ . Dans le cas où on a sommé un nombre  $N$  impair de niveaux on obtient  $[-Nx]$  et si  $N$  est pair on a  $[N(1/2 - x)]$ , d'où

$$J_N = J_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad \text{si } N \text{ est pair} \quad (43)$$

$$J_N = -J_0 \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \text{si } N \text{ est impair} \quad (44)$$

avec

$$J_0 = \frac{|e_e|\hbar N}{2\pi ma^2} \quad (45)$$

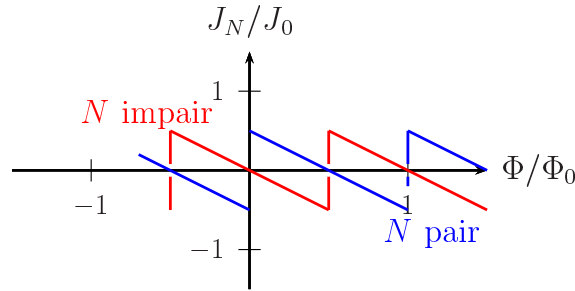
60. -

Il suffit de changer le signe du courant car les pentes des niveaux d'énergie sont inversées. En effet la courbe  $E_0(\Phi)$  est paire, et sur l'intervalle considéré on a la parité

$$E_{-\ell}(-\Phi) = E_{\ell}(\Phi)$$

de sorte que les dérivées sont impaires.

61. -

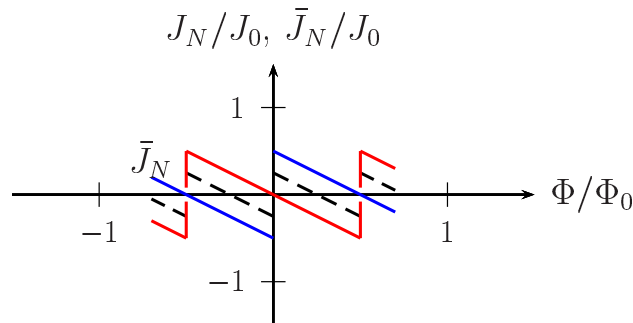


**Figure 4.** Allure du courant dans l'anneau pour un nombre pair (en bleu) ou impair (en rouge) d'électrons en fonction du flux du champ magnétique appliqué.

En raison des changements de signe des contributions successives, il y a compensation partielle et le courant résultant n'est pas extensif avec le nombre d'électrons.

62. -

Le courant moyen  $\frac{1}{4}J_0 - \frac{\Phi}{\Phi_0}J_0$  a une période moitié ( $\Phi/2\Phi_0$ ).



**Figure 5.** Allure du courant moyen en fonction du flux du champ magnétique appliqué.

## IV. - Brisure spontanée de symétrie

### IV.1.- Analogie mécanique

63. - La différence de pression entre les deux côtés de la bille produit une force

$$RT \mathcal{A} [(V_0 - L \mathcal{A} \theta)^{-1} - (V_0 + L \mathcal{A} \theta)^{-1}] \simeq a T \theta \quad \text{avec} \quad a = 2R \mathcal{A}^2 L / V_0^2$$

64. - A l'équilibre  $\theta_0$  on a  $mg \sin \theta_0 = aT \theta_0$  (projection dans la direction tangentielle) ou

$$\sin \theta_0 = \frac{aT}{mg} \theta_0$$

Une solution graphique peut être obtenue en cherchant l'intersection des courbes  $\sin \theta$  vs  $\theta$  et  $\frac{aT}{mg} \theta$  vs  $\theta$ . On trouve une solution  $\theta_0(T) = 0$  pour toute température  $T$  et  $\theta(T) \neq 0$  au-dessous d'une certaine valeur critique.

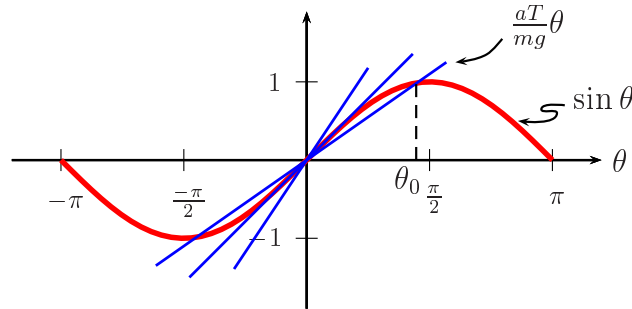


Figure 6. Solution graphique de la condition d'équilibre.

65. - La valeur critique de  $T$  sépare les deux types de solutions, elle est donnée par l'égalité des tangentes à l'origine, soit  $T_c = mg/a$ . L'allure de la position d'équilibre stable en fonction de  $T$  est donnée ci-dessous.

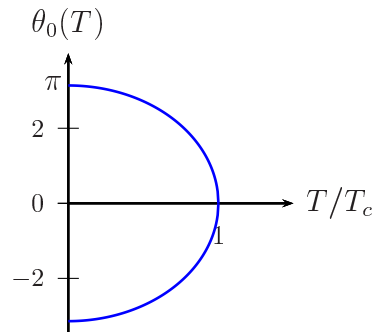


Figure 7. Evolution du paramètre d'ordre avec la température.

66. - Pour  $T \rightarrow T_c^-$ ,  $\theta_0$  est petit et  $\sin \theta_0 \simeq \theta_0 - \frac{1}{6}\theta_0^3$  de sorte que l'équation d'équilibre à cet ordre donne

$$\theta_0(T) = \sqrt{6} \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2} \quad \beta = 1/2 \quad (46)$$

67. - On a maintenant suivant la direction tangentielle

$$\sin \theta_h(T) = \frac{T}{T_c} \theta_h(T) - \frac{h}{mg}$$

de sorte que la solution  $\theta_h$  en présence de la force externe en  $h$  est toujours non nulle (cf figure).

68. - Pour  $T > T_c$ ,  $\theta_h(T) = \Delta\theta(T)$  soit  $\sin \theta_h(T) \simeq \Delta\theta(T)$  et l'équilibre est régi par

$$\Delta\theta(T) + \frac{h}{mg} = \frac{T}{T_c} \Delta\theta,$$

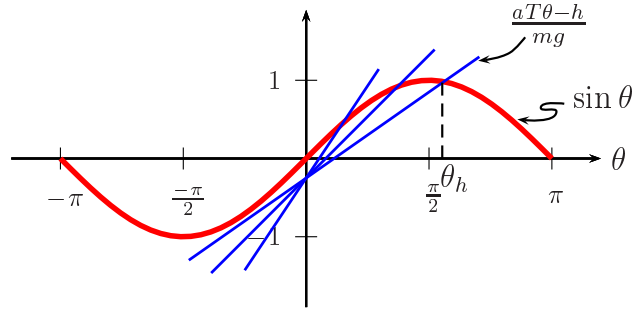


Figure 8. Solution graphique de la condition d'équilibre sous champ.

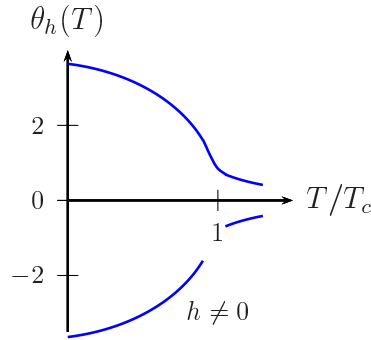


Figure 9. Evolution du paramètre d'ordre sous champ avec la température.

$$\Delta\theta(T) \simeq \frac{h}{mg} \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-1}$$

On en déduit la susceptibilité à haute température

$$\chi_{>}(T) = \frac{1}{mg} \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^{-1}, \quad \gamma = 1 \quad (47)$$

Pour  $T < T_c$ , on écrit  $\theta_h = \theta_0 + \Delta\theta$  soit dans la condition d'équilibre  $\sin \theta_h = \frac{T}{T_c} \theta_h - \frac{h}{mg}$

$$\Delta\theta \left( \frac{T}{T_c} - \cos \theta_0 \right) = \frac{h}{mg}$$

Un calcul simple donne, avec  $\cos \theta_0 \simeq 1 - \theta_0^2/2$  :

$$\chi_{<}(T) = \frac{1}{2mg} \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-1}, \quad \gamma' = 1 \quad (48)$$

69. - Sur l'isotherme critique,  $T = T_c$ ,  $\theta_h = \Delta\theta$  et la condition d'équilibre donne  $\Delta\theta(1 - (\Delta\theta)^2/6) + h/mg = \Delta\theta$  soit

$$\Delta\theta \simeq \left( \frac{6h}{mg} \right)^{1/3}, \quad \delta = 3 \quad (49)$$

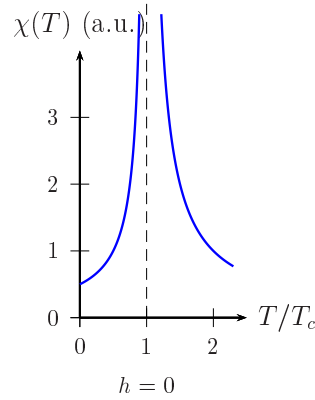


Figure 10. Evolution de la susceptibilité avec la température.

## IV.2.- Développement de Landau

70. - Pour chaque compartiment on a  $U - U_0 = C_0(T - T_0)$ ,  $S - S_0 = R \ln(V/V_0) + C_0 \ln(T/T_0)$  soit pour chaque compartiment de gaz parfait

$$F - F_0 = C_0(T - T_0) - RT \ln(V/V_0) - C_0 T \ln(T/T_0).$$

Pour les structures solides la contribution est fonction de  $T$  uniquement,  $F_{\text{str.}}(T)$  et il faut tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_p = -mgL(1 - \cos \theta)$$

et l'opposé du travail de la force externe,  $-W = -hL\theta$ . Au total on obtient l'énergie libre

$$F_{\text{tot}} = F_1(T) - RT \ln(1 + \mathcal{A}L\theta/V_0) - RT \ln(1 - \mathcal{A}L\theta/V_0) - mgL(1 - \cos \theta) - hL\theta$$

71. - On développe au quatrième ordre

$$F(\theta(T)) \simeq F_1(T) - hL\theta(T) + \left( \frac{RT \mathcal{A}^2 L^2}{V_0^2} - \frac{mgL}{2} \right) \theta^2(T) + \left( \frac{RT \mathcal{A}^4 L^4}{2V_0^4} + \frac{mgL}{24} \right) \theta^4(T) \quad (50)$$

soit  $u_0 = \text{const.} > 0$  et  $r_0 = a(T - T_c)$ .

72. -

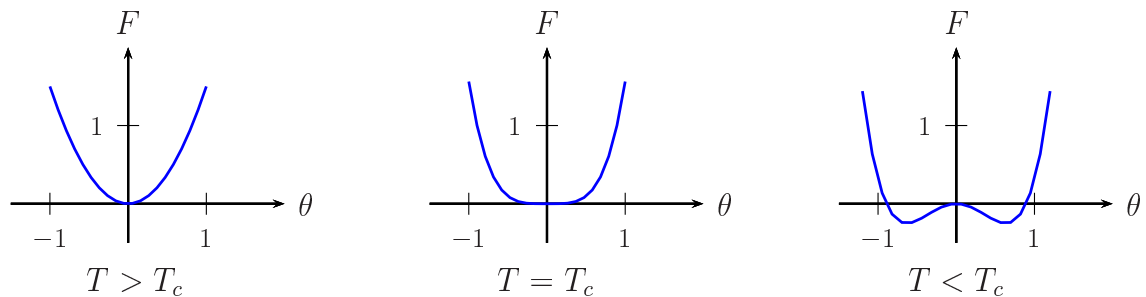


Figure 11. Energie libre en fonction du paramètre d'ordre à différentes températures.

A l'équilibre  $\theta_0(T)$  on a  $\partial F / \partial \theta|_{\theta_0} = 0$ , soit

$$h = \theta_0(r_0 + u_0 \theta_0^2)$$

donc en “champ” nul  $h = 0$  on obtient une solution

$$\theta_0(T) = 0$$

pour  $T \geq T_c$  et une solution stable non nulle (c'est-à-dire  $\partial^2 F / \partial \theta^2|_{\theta_0} > 0$ ),

$$\theta_0(T) = \sqrt{-r_0/u_0}$$

pour  $T \leq T_c$ . Ces solutions coïncident avec celles calculées précédemment au voisinage de  $T_c$ .

## V. - Théorie de Ginzburg-Landau de la supraconductivité

### V1.- Généralités

**73.** - Dans le cas de la supraconductivité on peut citer la conduction du courant sans dissipation, la condensation des quasi-particules (paires de Cooper) dans un état quantique cohérent.

Pour la superfluidité, on a de même un état fondamental macroscopique où le fluide a une viscosité nulle.

On peut citer la condensation de Bose-Einstein maintenant réalisée dans les gaz atomiques froids. Il s'agit d'une transition quantique d'un gaz parfait de bosons, donc sans interactions entre les atomes.

On peut penser au laser et à la condensation des photons dans un état cohérent où la phase est parfaitement déterminée.

L'effet Hall quantique fractionnaire résulte de la condensation d'anyons couplés à des fractions de quantum de flux dans un état cohérent qui conduit le courant en surface sans dissipation.

**74.** - Découverte par K. Onnes en 1911 par la disparition de la résistivité du mercure au-dessous de 4.2 K.

Vers 1935 les théories des frères London et de Peierls.

1950 la théorie phénoménologique de Ginzburg et Landau.

1957 Les paires de Cooper puis la théorie BCS (Bardeen, Cooper et Schrieffer).

1986 la découverte des supraconducteurs à haute  $T_c$  par Bednorz et Müller.

2000 les supraconducteurs non conventionnels et les effets de spin.

### V2.- L'approche de London et London

**75.** - On considère des électrons non relativistes, on peut donc négliger le terme en  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  dans la force. On combine ensuite  $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$  et  $m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e \mathbf{E}$  pour obtenir l'équation de mouvement

$$\partial_t \mathbf{j}_s = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}.$$

Cette relation est couplée à l'équation de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  pour donner

$$\partial_t \left( \nabla \times \mathbf{j}_s + \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \right) = 0 \quad (51)$$

et par intégration (avec une constante d'intégration nulle) :

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -(n_s e^2 / m) \nabla \times \mathbf{A},$$

soit

$$\mathbf{j}_s = -\Lambda \mathbf{A}, \quad \Lambda = \frac{n_s e^2}{m} \quad (52)$$

76. -

Les vecteurs  $\mathbf{j}_s$  et  $\mathbf{A}$  sont changés tous deux de signe par renversement temporel, le coefficient  $\Lambda$  qui les lie est donc associé à une propriété physique qui ne brise pas cette symétrie de renversement de sens du temps. C'est donc une propriété non dissipative.

77. - On se place en régime permanent. Les équations  $\nabla \times \mathbf{j}_s = -\Lambda \mathbf{B}$  et  $\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$  conduisent à

$$\frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}}_{-\nabla^2 \cdot \mathbf{B}} = -\Lambda \mathbf{B}$$

d'où

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{B} - \mu_0 \Lambda \mathbf{B} = 0$$

soit une équation dans laquelle apparaît une longueur  $\lambda_L$  telle que  $\lambda_L^2 = 1/\mu_0 \Lambda = m/\mu_0 n_s e^2$ . C'est la longueur de London. La solution de l'équation pour  $\mathbf{B}$  est exponentiellement décroissante et rend compte de l'effet Meissner. Le champ  $\mathbf{B}$  étant nul en volume, il en est de même de la densité de courant  $\mathbf{j}_s$ , proportionnelle à  $\nabla \times \mathbf{B}$ . La longueur de London suit une dépendance en température qui est donnée empiriquement

$$\lambda_L(T) = \lambda_L(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}. \quad (53)$$

et qui montre une divergence à la température de transition, c'est-à-dire qu'à mesure que  $T \rightarrow T_c^-$ , le champ pénètre de plus en plus en volume dans le matériau.

78. -

Il s'agit de lévitation magnétique car le supraconducteur expulse les lignes de champ créées par le matériau ferromagnétique. Cela produit une déformation des lignes de champ, donc une contribution défavorable à l'énergie magnétique du champ créé par l'aimant qui produit une force dans un sens tel qu'elle éloigne l'aimant pour que la configuration de lignes de champ soit moins perturbée. Il y a équilibre quand cette force est compensée par le poids de l'aimant. Le même type de phénomène peut être obtenu en faisant léviter le matériau supraconducteur sur un aimant.

---

### V.3.- Thermodynamique des supraconducteurs homogènes

79. - Avec

$$df = -sdT + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (54)$$

et  $g = f - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$ , soit

$$dg = -sdT - \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$$

Cette fonction thermodynamique est adaptée aux paramètres de contrôle  $T$  et  $\mathbf{H}$  maîtrisés par un expérimentateur.

80. -

Dans la phase de Meissner on a  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$ , c'est-à-dire un comportement diamagnétique parfait  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$  avec ici  $\chi = -1$  qui expulse le champ magnétique du volume du matériau.

81. -

$$g(T, \mathbf{H}) = g(T, 0) - \mu_0 \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{M}(\mathbf{H}') \cdot d\mathbf{H}'$$

donne dans la phase de Meissner où  $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$

$$g_S(T, \mathbf{H}) = g_S(T, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathbf{H}|^2.$$

Dans la phase normale avec  $\mathbf{M} \simeq 0$ ,

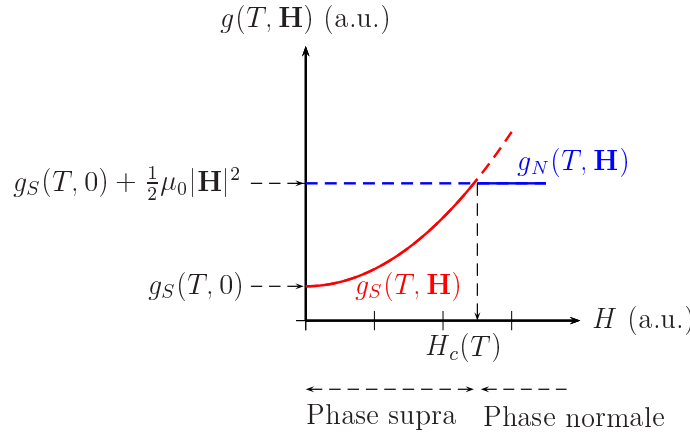
$$g_N(T, \mathbf{H}) = g_N(T, 0).$$

Or  $g_S(T, H_c) = g_N(T, H_c)$  le long de la ligne de transition, donc

$$g_S(T, 0) + \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2 = g_N(T, 0),$$

soit

$$g_S(T, 0) - g_N(T, 0) = -\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$$



**Figure 12.** Stabilité de la phase supraconductrice sous champ.

**82.** -

$s = -\left.\frac{\partial g}{\partial T}\right|_{\mathbf{H}}$  de sorte que

$$s_S(T, \mathbf{H}) - s_N(T, \mathbf{H}) = \left.\frac{\partial g_N}{\partial T}\right|_{\mathbf{H}} - \left.\frac{\partial g_S}{\partial T}\right|_{\mathbf{H}}.$$

Or

$$\begin{aligned} g_S(T, \mathbf{H}) &= g_S(T, 0) + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \\ &= g_N(T, 0) - \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \\ &= g_N(T, \mathbf{H}) - \frac{1}{2}\mu_0 (H_c^2 - H^2) \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$s_S - s_N = \left.\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{2}\mu_0 (H^2 - H_c^2)\right|_{\mathbf{H}} = \mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT}$$

Avec la variation

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right) \quad (55)$$

on obtient

$$\Delta s(T, \mathbf{H}) = -2\mu_0 H_c^2(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) \frac{T}{T_c}$$

soit  $\Delta s(T_c, H = 0) = 0$  ce qui correspond à une transition du second ordre alors que la transition sous champ à température plus basse s'accompagne de  $\Delta s(T < T_c, \mathbf{H}) \neq 0$  ce qui correspond à une chaleur latente de changement d'état non nulle et à une transition du premier ordre.



83. -

On procède à une dérivation supplémentaire,  $c = T \frac{\partial s}{\partial T}$ . Cela donne

$$c_S - c_N = \mu_0 T \frac{d}{dT} \left( H_c \frac{dH_c}{dT} \right) = \mu_0 T \left[ H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} + \left( \frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right]$$

Avec  $dH_c/dT = H_c(0)(-2T/T_c^2)$  et  $d^2 H_c/dT^2 = H_c(0)(-2/T_c^2)$  il vient

$$c_S - c_N = \mu_0 H_c^2(0) \frac{2T}{T_c^2} \left( 3 \frac{T^2}{T_c^2} - 1 \right)$$

Comme la phase normale possède une contribution du gaz électronique  $c_N \sim \gamma_e T$  et avec  $c_S/T \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow 0$  il vient

$$\gamma_e = 2\mu_0 H_c^2(0)/T_c^2 \quad \text{et} \quad \frac{c_S}{T} = 3\gamma_e \left( \frac{T}{T_c} \right)^2$$

---

#### V.4.- Théorie de Ginzburg-Landau

84. -

amortissement Landau dans les plasmas,

[diamagnétisme de métaux](#),

théorie des étoiles,

thermodynamique et évolution de l'univers (avec Bronstein),

[théorie de Landau des transitions de phase](#),

origine de l'énergie des étoiles,

théorie des cascades électroniques dans le rayonnement cosmique (avec Rumer),

la théorie de la turbulence,

[théorie de la superfluidité \(avec Khalatnikov\)](#),

[théorie de la supraconductivité \(avec Ginzburg\)](#),

les transitions quantiques dans les systèmes avec croisement de niveaux (Landau - Zener),

[théorie de Landau des liquides de Fermi](#).

Sur le plan institutionnel et académique : [les cours de physique théorique de Landau et Lifshitz](#) (poursuivis après sa mort par Lifshitz et Pitaievskii, toujours sous le nom du cours de Landau et Lifshitz), l'école de physique théorique de l'institut Kapitza devenue l'[institut Landau pour la physique théorique](#) (Moscou et Chernogolovka).

85. -

En 1957 a été développée la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer selon laquelle les [interactions électrons - phonons](#) favorisent à basse température la création de quasi-particules obéissant à une statistique bosonique et susceptibles de former dans l'état fondamental un état cohérent d'énergie plus basse que celle du métal normal (existence d'un gap en énergie qui "protège" la phase supraconductrice). Cette théorie décrit remarquablement la supraconductivité conventionnelle. [Les quasi-particules dans la supraconductivité conventionnelle sont en fait des paires de Cooper, c'est-à-dire avec une charge  \$e = -2|e\_c|\$  et une masse effective  \$m = m^\*\$ , la masse effective des paires.](#)

86. -

Ginzburg et Landau proposent un [développement en puissance de  \$|\psi|\$](#)  car c'est un paramètre d'ordre, nul dans la phase de HT et non nul à BT, donc supposé petit au voisinage de  $T_c$ .

$r_0 > 0$  à  $T > T_c$  pour assurer que  $|\psi| = 0$  pour  $T > T_c$  et  $r_0 < 0$  assure  $|\psi| \neq 0$  pour  $T < T_c$ .

$u_0 > 0$  assure la stabilité thermodynamique et un paramètre d'ordre non divergent.

Les fluctuations spatiales doivent être défavorables d'où un terme en  $|\nabla\psi|^2$  avec un coefficient positif. La combinaison  $|-i\hbar\nabla\psi - e\mathbf{A}\psi|^2$  est invariante de jauge.

**87. -**

L'équation

$$r_0\psi(\mathbf{r}) + u_0|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + 2|e_e|\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (56)$$

est une **équation de Schrödinger non linéaire pour des particules de charge  $-2|e_e|$  et de masse  $m$  sous champ magnétique**. Ici on ne prend pas en compte le spin éventuel de ces particules [les paires de Cooper de fait sont dans un état singulet, donc de spin nul]. Le terme non linéaire provient des interactions particules-particules.

L'équation

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \frac{i|e_e|\hbar}{m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4e_e^2}{m}\mathbf{A}|\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (57)$$

est l'**équation de Maxwell-Ampère en régime statique avec un courant électrique dû au mouvement des charges dans le supraconducteur**, comprenant tout d'abord le terme paramagnétique, puis le terme diamagnétique, tous deux écrits ici avec une **charge double de celle de l'électron**.

**88. -**

On part de (51) ou de  $f_{S,0} = f_{N,0} + r_0|\psi|^2 + \frac{u_0}{2}|\psi|^4$  que l'on dérive pour déterminer l'équilibre thermodynamique,

$$\left. \frac{\partial f_{S,0}}{\partial \psi^*} \right|_{\psi_0} = r_0\psi_0 + u_0|\psi_0|^2\psi_0 = 0,$$

soit  $r_0 + u_0|\psi_0|^2 = 0$  ou  $\psi_0 = 0$ . On a donc  $\psi_0 = 0$ , soit

$$n_S = 0 \text{ pour } T > T_c$$

et

$$n_S = |\psi_0|^2 = -r_0/u_0 = \frac{1}{u_0} \left( \frac{dr_0}{dT} \right)_{T_c} (T_c - T) \text{ pour } T < T_c$$

**89. -**

Notons maintenant  $f_{S,0} = f_{N,0} + r_0n_S(T) + \frac{1}{2}u_0n_S^2(T)$  ce qui donne l'entropie par dérivation par rapport à la température,

$$s_S = s_N - \frac{d}{dT}(r_0n_S + \frac{1}{2}u_0n_S^2) = s_N + \frac{1}{u_0} \left( \frac{dr_0}{dT} \right)_{T_c} (T - T_c)$$

Une dérivée supplémentaire donne la chaleur spécifique

$$c_S = c_N + T \frac{1}{u_0} \left( \frac{dr_0}{dT} \right)_{T_c}^2$$

**90. -**

Dans l'équation (57) **seul subsiste le terme diamagnétique** qui permet d'identifier la constante de London,  $\Lambda = 4n_S e_e^2/m$ .

**91. -**

A l'aide de  $f = g + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$ , on a  $f(T, 0) \simeq g(T, 0)$  donc

$$f_N(T, 0) - f_S(T, 0) \simeq g_N(T, 0) - g_S(T, 0)$$

où le premier membre vaut  $-r_0n_S - \frac{1}{2}u_0n_S^2 = r_0^2/2u_0$  d'où l'on déduit  $H_c^2(T) = \frac{r_0^2}{\mu_0 u_0}$ , soit finalement

$$H_c(T) \simeq \frac{T_c}{\sqrt{\mu_0 u_0}} \left( \frac{dr_0}{dT} \right)_{T_c} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

Comparé à la valeur empirique de l'énoncé qui donne  $H_c(T) \simeq 2H_c(0)(1 - T/T_c)$  quand  $T \rightarrow T_c$ , on déduit que

$$H_c(0) = \frac{T_c}{2\sqrt{\mu_0}u_0} \left( \frac{dr_0}{dT} \right)_{T_c}$$

**92. -**

A l'aide des réponses aux questions 75, 77 et 99, on déduit

$$\lambda_L^2(T) = \frac{m}{\mu_0 e^2} \frac{u_0}{(-r_0)}.$$

Par ailleurs la question 91 fournit

$$H_c^2(T) = \frac{1}{\mu_0} \frac{(-r_0)^2}{u_0}.$$

On peut éliminer  $u_0$  en formant la combinaison

$$-r_0 = \frac{4\mu_0^2 |e_e|^2}{m} \lambda_L^2(T) H_c^2(T)$$

soit, avec les formes empiriques de  $\lambda_L(T)$  et de  $H_c(T)$ ,

$$\lambda_L^2(T) H_c^2(T) = \lambda_L^2(0) H_c^2(0) \underbrace{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2}_{\frac{T_c - T}{T_c}} \underbrace{\left(1 + \frac{T}{T_c}\right)^2}_{\simeq 4},$$

$$-r_0 = \frac{4\mu_0^2 |e_e|^2}{m} \underbrace{\frac{\lambda_L^2(0) H_c^2(0)}{T_c}}_{\text{const.} > 0} (T_c - T)$$

De la même manière on élimine  $r_0$  en formant

$$u_0 = \frac{\mu_0^3 e^4}{m^2} \lambda_L^4(T) H_c^2(T)$$

et cette fois, avec

$$\lambda_L^4(T) H_c^2(T) = \lambda_L^4(0) H_c^2(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-2} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \underbrace{\left(1 + \frac{T}{T_c}\right)^2}_{\simeq 4},$$

$$u_0 \simeq \frac{4\mu_0^3 e^4}{m^2} \lambda_L^4(0) H_c^2(0).$$

**93. -**

Avec les notations de l'énoncé, le courant paramagnétique prend une forme proportionnelle au gradient de la phase et on obtient pour le courant total

$$\mathbf{j} = -\frac{2|e_e|\hbar}{m} f^2(\mathbf{r}) \nabla \theta(\mathbf{r}) - \frac{4|e_e|^2}{m} \mathbf{A} f^2(\mathbf{r})$$

**94. -**

Avec  $\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi$  et une fonction d'onde uniforme on aurait uniquement le courant diamagnétique donné dans l'énoncé, proportionnel à  $\mathbf{A}$ , soit

$$\mathbf{j}_S = -(4e_e^2 n_s / m) (\Phi / 2\pi r) \mathbf{u}_\varphi \quad (58)$$

et donc non nul en volume. C'est contraire à la contrainte, issue de la théorie de London par exemple, d'un courant nul en volume et cela impose donc que la fonction d'onde soit non uniforme.

95. -

Avec une phase locale (fonction de  $\mathbf{r}$ ) on a un courant total qui comprend deux termes  $\mathbf{j} = -\frac{2|e_e|}{m}(\hbar\nabla\theta + 2|e_e|\mathbf{A})f^2$  qui peut donc s'annuler si  $\hbar\nabla\theta = -2|e_e|\mathbf{A}$ , soit si

$$\theta(\varphi) = -\frac{2|e_e|}{\hbar}\Phi\frac{\varphi}{2\pi}$$

Pour que la fonction d'onde soit monovaluée, il faut alors que  $\theta(2\pi) - \theta(0) = -2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  soit

$$\Phi = k\Phi_0, \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = 2\pi\hbar/2|e_e| \simeq 2.069 \cdot 10^{-15} \text{T.m}^2 \quad [\text{Wb}]$$

96. -

Un courant proportionnel à  $\mathbf{A}$  pose un problème d'invariance de jauge car  $\mathbf{A}$  est modifié par changement de jauge. Dans une situation générale, ce n'est pas un problème, car au courant diamagnétique s'ajoute un courant paramagnétique et un changement de jauge change les proportions respectives de ces deux termes de sorte que la somme reste invariante de jauge. Dans le cas de la supraconductivité, seul le terme diamagnétique subsiste, ce qui signifie que l'on n'a plus la liberté de changer de jauge. On dit que la jauge est fixée.

97. - Dans les conditions de l'énoncé on obtient

$$f_{S,B} = f_{N,0} + r_0|\psi_0|^2 + \frac{1}{2}u_0|\psi_0|^4 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 + \frac{e^2|\mathbf{A}|^2}{2m}|\psi_0|^2.$$

Le mécanisme fondamental est donc l'apparition dans l'énergie libre du dernier terme (appelé terme de masse) qui brise l'invariance de jauge dès lors que le paramètre d'ordre est non nul, donc en phase supraconductrice. Ce terme, proportionnel à la fois à la densité de particules dans l'état supraconducteur et au carré du potentiel vecteur, est à l'origine de la forme de London et London pour le courant et donc de l'effet Meissner. Dans le mécanisme de Higgs, de la même manière l'existence d'un champ (de Higgs) non nul brise la symétrie de jauge, donne un terme de masse dans l'énergie libre ou dans le lagrangien, ce qui est l'origine de la masse des bosons d'échange de l'interaction faible  $Z^0, W^\pm$ . Le boson de Higgs, dont l'existence a été prédite en 1964, a été découvert au CERN en 2012, il confirme la construction connue sous le nom de modèle standard et qui unifie les interactions faible, électromagnétique et forte.

## Fin du problème