

A-Oscillateur harmonique

1. Par application de la loi de quantité de mouvement au point M et projetée sur l'axe Ox où le poids et la réaction de l'axe n'ont pas de composantes (et en remarquant que x est aussi la longueur du ressort) on obtient

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Poids et réaction de l'axe sont dirigés orthogonalement à la direction Ox du mouvement, elles ne travaillent pas. Seule la tension du ressort $\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$ travaille. On peut chercher à écrire $\vec{T} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ où E_p est une fonction de la position de M seulement et donc ici une fonction de x uniquement. On écrit alors $\vec{T} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e}_x$ et on obtient l'expression de E_p à une constante près :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

3. La seule force qui travaille dérivant d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p(x)$ se conserve au cours du mouvement, or initialement $E_m = E_p(x_0)$ puisque le point M est lâché sans vitesse initiale. Au cours du mouvement, à tout instant, $E_c \geq 0$ donc les points accessibles vérifient

$$E_p(x) \leq E_m = \frac{1}{2}k(x_0 - l_0)^2$$

On écrit alors pour ce domaine $x \in [x_1; x_2]$ avec x_1 et x_2 solutions de

$$(x - l_0)^2 = (x_0 - l_0)^2$$

Avec la condition $x_0 > l_0$ on trouve

$$x \in [x_1; x_2] \quad \text{avec} \quad x_1 = 2l_0 - x_0 ; x_2 = x_0$$

4. La résolution de l'équation obtenue à la question 1. donne

$$x(t) = l_0 + \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$$

et avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on trouve $\alpha = x_0 - l_0$ et $\beta = 0$ d'où la solution

$$x(t) = l_0 + (x_0 - l_0) \cos(\omega_0 t)$$

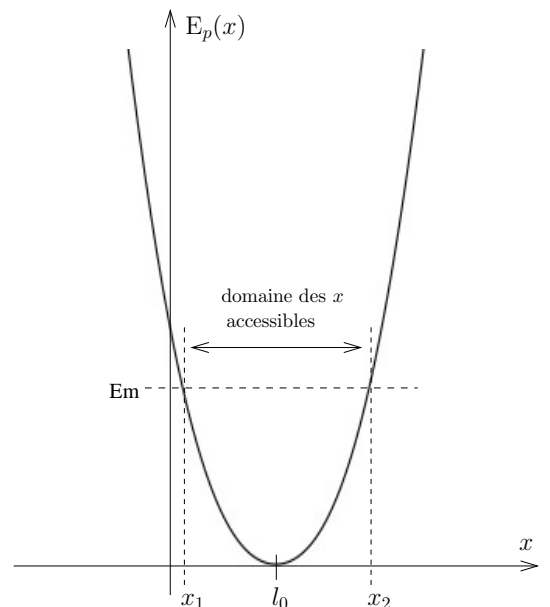
Avec la condition $x_0 > l_0$, on retrouve bien que $x(t)$ évolue entre les deux valeurs $x_{\min} = x_1 = 2l_0 - x_0$ (lorsque $\cos(\omega_0 t) = -1$) et $x_{\max} = x_2 = x_0$ (lorsque $\cos(\omega_0 t) = 1$) comme à la question précédente.

5. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m\ddot{x} = -\frac{dE}{dx}(x)$$

Ainsi à l'équilibre $-\frac{dE}{dx}(x_e) = 0$, $E(x)$ atteint un extremum en $x = x_e$.

pour x proche de x_e , on réalise un développement limité à l'ordre 1 de $\frac{dE}{dx}(x)$ au voisinage de x_e qui donne



en tenant compte de $\frac{dE}{dx}(x_e) = 0$

$$\frac{dE}{dx}(x) = (x - x_e) \frac{d^2E}{dx^2}(x_e) + o(x - x_e)$$

on peut donc écrire l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre selon

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left(\frac{d^2E}{dx^2}(x_e) \right) x = \frac{x_e}{m} \left(\frac{d^2E}{dx^2}(x_e) \right)$$

Cette équation à des solutions bornées quand $\frac{d^2E}{dx^2}(x_e) > 0$, c'est alors une équation d'oscillateur harmonique classique. Dans le cas contraire les solutions divergent et l'équilibre est alors instable puisqu'une infime perturbation l'en écarte. On obtient donc la condition

Équilibre stable ssi $\frac{d^2E}{dx^2}(x_e) > 0$

ou encore

Équilibre stable ssi $E(x)$ est minimale en $x = x_e$

6. Dans l'exemple précédent, $E_p(x)$ est minimale en $x = l_0$, c'est là que se trouve la position d'équilibre qui est, de plus, stable.

B-Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité

7. Les trois forces qui s'appliquent sur M sont : son poids \vec{P} , la réaction du support \vec{R} et la tension \vec{T} du ressort. Sans frottement la réaction du support est perpendiculaire à l'axe $x'Ax$ tout comme le poids. De plus le mouvement étant contraint selon $x'Ax$, l'accélération verticale est nulle et donc aussi la résultante des forces projetée sur cette direction verticale. La résultante des forces se limite alors à la composante de \vec{T} selon la direction $x'Ax$. Soit

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = (\vec{T} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x$$

où \vec{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe Ax . On obtient en notant θ l'angle entre \vec{OM} et l'axe Ax

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = -k(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0) \cos \theta \vec{e}_x$$

ou encore en remarquant que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = -k \left(x - \frac{x l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) \vec{e}_x$$

qu'on peut écrire

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = -\frac{dE'_p}{dx} \vec{e}_x$$

avec, à une constante près, $E'_p(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - 2l_0\sqrt{d^2 + x^2})$, soit encore

$$E'_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2 + \text{cte}$$

on remarque que c'est l'expression classique de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\sqrt{d^2 + x^2}$, de longueur à vide l_0 et de raideur k . En utilisant $\alpha = d/l_0$ et en choisissant la constante nulle :

$$E'_p(x) = \frac{1}{2}kl_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1 \right)^2$$

8. On cherche les positions d'équilibre en cherchant pour quelles valeurs de x la fonction $E'_p(x)$ est extrémale.

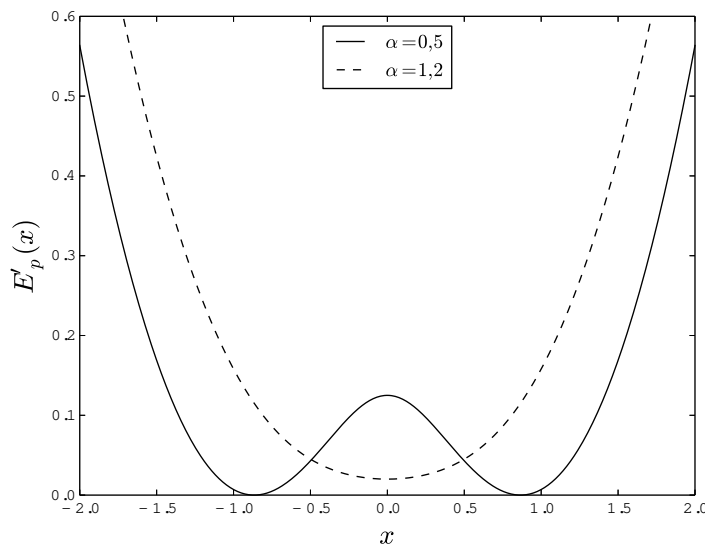
On résout alors $\frac{dE'_p}{dx}(x) = 0$ soit

$$kx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2}} \right) = 0$$

cela donne les racines $x = 0$ et $x = \pm l_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ si $\alpha \leq 1$. On peut donc dénombrer les positions d'équilibre :

si $\alpha < 1$, trois positions d'équilibre $x_e = 0, \pm l_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$; si $\alpha > 1$, une position d'équilibre $x_e = 0$

9. Les allures des courbes $E'_p(x)$ sont données ci-dessous, elles ont été tracées dans le cas particulier où $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$ et $l_0 = 1 \text{ m}$ et pour les deux cas $\alpha > 1$ ($\alpha = 1,2$) et $\alpha < 1$ ($\alpha = 0,5$).



En observant les valeurs extrémales de $E'_p(x)$ on constate donc que :

- pour $\alpha > 1$, l'unique position d'équilibre en $x = 0$ est stable ;
- pour $\alpha < 1$, la position d'équilibre en $x = 0$ est instable et les deux positions d'équilibre symétriques en $x = \pm l_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ sont stables.

10. En utilisant la somme des forces $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = -k \left(x - \frac{x l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) \vec{e}_x$ calculée à la question 7. et en projetant la loi de quantité de mouvement selon \vec{e}_x , on obtient en faisant apparaître le coefficient α

$$m\ddot{x} = -k \left(x - \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{x^2}{l_0^2}}} \right)$$

soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{x^2}{l_0^2}}} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La position d'équilibre est ici en $x = 0$ ($\alpha > 1$) et pour des petits mouvements x reste proche de zéro, si bien qu'on peut réaliser un développement limité de $\left(\alpha^2 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}$ sous la forme

$$\left(\alpha^2 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{2\alpha^2 l_0^2} + o(x^2) \right)$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x , l'équation différentielle du mouvement se réduit à

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) x = 0$$

c'est une équation harmonique donnant des solutions sinusoidales de pulsation $\Omega_{\text{sup}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}$, la période correspondante est alors

$$\boxed{T_{\text{sup}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{sup}}} = T_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

11. On reprend la même étude qu'à la question précédente mais cette fois pour des positions proches des positions d'équilibre situées en $x_{\text{eq}} = \pm l_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ qu'on écrira $x_{\text{eq}} = \delta l_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ avec $\delta = \pm 1$. On se limite alors à des petits mouvements autour de ces positions d'équilibre de sorte que $x = x_{\text{eq}} + u$ avec $u \ll |x_{\text{eq}}| < l_0$. Dans ces conditions, l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{u} + \omega_0^2 (\delta l_0 \sqrt{1 - \alpha^2} + u) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\delta \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{u}{l_0} \right)^2}} \right) = 0$$

soit

$$\ddot{u} + \omega_0^2 (\delta l_0 \sqrt{1 - \alpha^2} + u) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\delta \frac{u}{l_0} \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{u^2}{l_0^2}}} \right) = 0$$

Comme $u \ll l_0$, on peut encore réaliser un développement limité de $\frac{1}{\sqrt{1 + 2\delta \frac{u}{l_0} \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{u^2}{l_0^2}}}$ selon

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2\delta \frac{u}{l_0} \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{u^2}{l_0^2}}} = 1 - \delta \frac{u}{l_0} \sqrt{1 - \alpha^2} + o\left(\frac{u}{l_0}\right)$$

en ne gardant que les termes d'ordre 1. Cela qui donne une équation pour u

$$\ddot{u} + \omega_0^2 (\delta l_0 \sqrt{1 - \alpha^2} + u) \delta \frac{u}{l_0} \sqrt{1 - \alpha^2} = 0$$

et en négligeant le terme en u^2/l_0^2 devant celui en u/l_0 , on obtient, en remarquant que $\delta^2 = 1$,

$$\ddot{u} + \omega_0^2(1 - \alpha^2)u = 0$$

c'est encore une équation harmonique donnant des solutions sinusoïdales de pulsation $\Omega_{\text{inf}} = \omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}$, la période correspondante est alors

$$\boxed{T_{\text{inf}} = \frac{2\pi}{\Omega_{\text{inf}}} = T_0\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

12. Pour de très petites valeurs de α ($\alpha \rightarrow 0$), on constate encore que $T_{\text{inf}} \rightarrow T_0$, on retrouve encore la période de la question 4.. Cela s'explique car alors pour d proche de zéro on retrouve exactement la situation du début de problème où les points A et O sont alors confondus.

Quand $\alpha \rightarrow 1$ on constate que les deux périodes T_{sup} et T_{inf} tendent vers $+\infty$. Cela est à relier au caractère de la position d'équilibre qui se trouve alors en $x = 0$. Dans ce cas, le mobile écarté de sa position d'équilibre dans un potentiel qui varie très peu autour de la position d'équilibre mettra un temps très long à revenir à la position d'équilibre.

C- Un exemple d'état métastable : liquide surfondu

13. On écrit les deux premiers principes de la thermodynamique pour le système considéré au cours de la transformation où le système reçoit le transfert thermique Q et le travail des forces pressantes $W = -P_0\Delta V$ avec ΔV la variation de son volume :

$$\Delta U = Q - P_0\Delta V \quad \text{et} \quad \Delta S \geq \frac{Q}{T_0}$$

En éliminant Q entre les deux expressions précédentes, on obtient bien $\boxed{\Delta(U + P_0V - T_0S) \leq 0}$

On en déduit que l'évolution du système se fait avec diminution de G^* jusqu'à ce que G^* atteigne sa valeur minimale à l'équilibre. Ce comportement est bien analogue à celui de l'énergie potentielle.

14. G et G^* se confondent car ici le système est constamment à l'équilibre thermique et mécanique avec le thermostat donc $T = T_0$ et $P = P_0$.

Pour exprimer G , on utilise l'extensivité des fonctions U et S et du volume, ce qui permet de conclure que G est aussi extensive et donc : $G = m_l g_l + m_s g_s$ où m_l est la masse de la phase liquide et m_s celle de la phase solide.

Ici $m_s = \frac{4\pi r^3}{3v_s}$ et $m_l = m - m_s$ donc

$$G = m g_l + \frac{4\pi r^3}{3v_s}(g_s - g_l)$$

15. Si l'eau doit être entièrement solide c'est que la valeur de G pour une même masse m d'eau entièrement solide doit être plus faible que la valeur calculée ci-dessus soit

$$m g_s < m g_l + \frac{4\pi r^3}{3v_s}(g_s - g_l)$$

ou encore

$$\left(m - \frac{4\pi r^3}{3v_s}\right)(g_s - g_l) = (m - m_s)(g_s - g_l) < 0$$

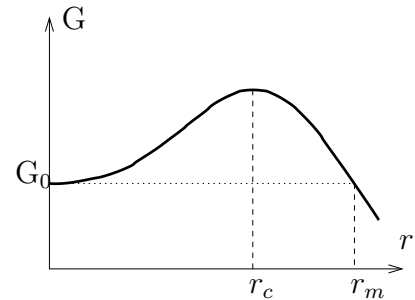
et puisque la masse totale m est supérieure à la masse m_s de la fraction solide, on en déduit $g_s - g_l < 0$.
 Ce qu'on peut aussi écrire directement...

16. En ajoutant le terme $4\pi\gamma r^2$ à l'enthalpie libre du système, on obtient

$$G = mg_l + \frac{4\pi r^3}{3v_s}(g_s - g_l) + 4\pi r^2\gamma$$

On calcule $\frac{dG}{dr} = \frac{4\pi r^2}{v_s}(g_s - g_l) + 8\pi r\gamma$ ce qui donne $\frac{dG}{dr} = 0$ pour $r = 0$ et $r = r_c = \frac{2\gamma v_s}{g_l - g_s}$.

On obtient le graphe de $G(r)$ qui présente, compte tenu du signe négatif de $g_s - g_l$, l'allure ci-contre.



17. Sans apport d'énergie la système évolue en faisant diminuer la valeur de G . On constate que si $r < r_c$ alors l'évolution se fait vers l'état $r = 0$ où il est entièrement liquide. Par contre si $r > r_c$, l'évolution se fait vers les grandes valeurs de r ce qui tend à rendre solide tout le volume. C'est ce qui se passe quand on ajoute un germe de glace solide de rayon supérieur à r_c .

18. On trouve $r_c = 2,18 \text{ nm}$. C'est une valeur très faible qui explique qu'il est difficile d'observer de l'eau dans cet état métastable.

19. On constate sur la courbe $G(r)$ qu'en $r = 0$, il existe un minimum relatif qui correspond à $G_0 = mg_l$. Cette valeur de G est aussi atteinte pour r_m tel que $\frac{4\pi r_m^3}{3v_s}(g_s - g_l) + 4\pi r_m^2\gamma = 0$ soit $r_m = \frac{3\gamma v_s}{g_l - g_s} = \frac{3}{2}r_c$. Ainsi si un germe de rayon supérieur à r_m peut prendre place dans le volume, la valeur de G pour ce rayon sera inférieure à G_0 rendant cet état plus stable. L'état correspondant au volume rempli d'eau liquide est donc métastable. Pour pouvoir atteindre une position plus stable où G serait plus stable, il faut passer « la bosse » qu'on peut observer sur la courbe présentée. C'est ce qui se passe lorsqu'on fait cesser la surfusion de la bouteille où l'agitation (ou un choc) apporte suffisamment d'énergie pour passer cette « bosse ».

D- Instabilité paramétrique

20. L'avantage de l'utilisation des deux tambours tient au fait que lorsque les tireurs tirent la corde qu'il tiennent de la longueur $\Delta l'$, les deux tambours montés sur le même axe tournent de l'angle $\alpha_1 = \Delta l'/r'$ si r' est le rayon (le plus petit) du tambour sur lequel est enroulée la corde des tireurs. De ce fait la corde soutenant l'encensoir étant enroulée sur le tambour de rayon $r > r'$, l'encensoir « remonte » de la longueur

$$\Delta l = r\alpha_1 = \frac{r}{r'}\Delta l' > \Delta l'$$

Le raccourcissement est amplifié par rapport au mouvement des tireurs.

L'application du théorème du moment cinétique au système constitué par la double tambour donne, dans les conditions de l'énoncé, une fois projeté sur l'axe de rotation : $r'T' - rT = 0$. soit

$$T' = \frac{r}{r'}T > T$$

Ainsi le système à deux tambours amplifie le raccourcissement du pendule (avantage) mais nécessite d'exercer une traction plus importante (inconvenient).

21. Ce qui est nommé force centrifuge par le texte est en fait la projection radiale de la force d'inertie d'entraînement appliquée à l'encensoir en considérant le référentiel de la cathédrale comme référentiel absolu galiléen. Le référentiel relatif est alors en rotation à la vitesse angulaire du pendule dans ce référentiel absolu.

Cette force est parfois appelée pseudo-force, elle n'est pas de même nature que le poids ou la tension de la corde puisqu'elle dépend du référentiel d'étude. Par contre son effet ne peut se distinguer de celui des « vraies » forces.

22. Dans le référentiel, d'origine O, en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel de la cathédrale, l'encensoir n'est soumis qu'à la tension \vec{T} de la corde et son poids $m\vec{g}$ et à la force d'inertie d'entraînement et à la force d'inertie de Coriolis. Cette dernière n'a jamais de composante radiale. On peut écrire, dans ce référentiel, la loi de quantité de mouvement pour l'encensoir qui donne, en projection sur la direction radiale du mouvement :

$$ma'_r = mg \cos \theta - T + mr\dot{\theta}^2$$

avec θ l'angle entre la corde et la verticale et T la tension de la corde, le terme en $m\dot{\theta}^2 r$ étant la projection radiale de la force d'inertie d'entraînement. On constate alors que ce n'est pas exactement le poids qui intervient mais sa projection sur la direction radiale du pendule ce que ne précise pas le texte.

23. La corde étant tendue à tout instant on peut écrire que la tension exercée sur l'encensoir s'écrit $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ avec $T > 0$, le vecteur \vec{e}_r étant radial dirigé du point O sur l'axe de rotation vers l'encensoir en M. Le travail élémentaire de cette force pour une variation de longueur dl vaut donc $\delta W = -Tdl$. Si la corde est raccourcie, $dl < 0$, le travail δW est bien positif, c'est l'inverse quand la corde est allongée.

L'énergie dont il est ici question (ligne 30) est l'énergie mécanique de l'encensoir.

24. On peut évaluer W_f à partir de la différence entre l'énergie en position haute et celle en position basse. En position haute on peut considérer que cette énergie est uniquement sous la forme d'énergie potentielle de pesanteur $E_h = mgh$ avec $h = 21$ m. En position basse, l'énergie n'est plus que sous forme d'énergie cinétique $E_b = \frac{1}{2}mv_0^2$ avec $v_0 = 68$ km.h⁻¹. Ainsi $W_f = m(gh - \frac{1}{2}v_0^2)$ et en assimilant E à E_h , l'énergie au début de ce quart de période, le rapport demandé vaut

$$1 - \frac{v_0^2}{2gh}$$

ce qui donne avec les valeurs numériques proposées un rapport de l'ordre de 0,13 ce qui ne permet pas vraiment de négliger les frottements de l'air.

25. La fréquence double s'explique par le fait que les tireurs raccourcissent la corde à chaque passage à la verticale de la corde donc deux fois par période.

La deuxième réponse est en fait dans le texte, le premier terme de la série de Fourier d'une excitation optimale (en créneaux d'amplitude E) est d'amplitude $\frac{4}{\pi}E$. Ainsi une excitation sinusoïdale de même amplitude E est $\frac{\pi}{4}$ fois moins efficace.

26. Entre B et C le moment cinétique en O du pendule se conserve car la tension et le poids sont alors

dirigés selon la direction de OM (avec M entre C et B). Cette conservation se traduit alors par

$$\boxed{v_B l_0 = v_C (l_0 - \Delta l)}$$

27. Pour les variations d'énergie, on doit évaluer les variations d'énergie cinétique et potentielle. Ainsi

$$\Delta E_{BC} = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g \Delta l - \frac{1}{2} m v_B^2$$

De plus en écrivant la conservation d'énergie entre C et D où $v_D = 0$ on obtient

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = m g (l_0 - \Delta l) (1 - \cos \theta)$$

Avec l'expression obtenue à la question précédente, on peut écrire

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \simeq \frac{1}{2} m v_C^2 \left(1 - 2 \frac{\Delta l}{l_0}\right) \quad \text{avec} \quad \Delta l \ll l_0$$

Tout cela donne

$$\Delta E_{BC} = m g (l_0 - \Delta l) (1 - \cos \theta) \left(1 - \left(1 - 2 \frac{\Delta l}{l_0}\right)\right) + m g \Delta l$$

soit

$$\Delta E_{BC} = 2 m g (l_0 - \Delta l) \frac{\Delta l}{l_0} (1 - \cos \theta) + m g \Delta l$$

ce qui donne en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas en Δl

$$\boxed{\Delta E_{BC} = m g \Delta l (3 - 2 \cos \theta)}$$

On obtient plus simplement ΔE_{DE} puisque la vitesse du pendule est nulle en D et E. Cette variation n'est que de la variation d'énergie potentielle

$$\boxed{\Delta E_{DE} = -m g \Delta l \cos \theta}$$

28. Ainsi pour un quart de période on peut écrire $\Delta E = \Delta E_{BC} + \Delta E_{DE}$, soit avec les expressions obtenues :

$$\Delta E = 3 m g \Delta l (1 - \cos \theta)$$

On peut évaluer l'énergie E du pendule dont parle le texte par son énergie initiale en B, donc $E = \frac{1}{2} m v_B^2$.

On a déjà vu à la question précédente que $\frac{1}{2} m v_B^2 \simeq \frac{1}{2} m v_C^2 \left(1 - 2 \frac{\Delta l}{l_0}\right)$ et que $\frac{1}{2} m v_C^2 = m g (l_0 - \Delta l) (1 - \cos \theta)$ ce qui donne

$$E = m g (l_0 - \Delta l) (1 - \cos \theta) \left(1 - 2 \frac{\Delta l}{l_0}\right) = m g l_0 (1 - \cos \theta) \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0}\right) \left(1 - 2 \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

soit à l'ordre 1 en Δl :

$$E = m g l_0 (1 - \cos \theta) \left(1 - 3 \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3 m g \Delta l (1 - \cos \theta)}{m g l_0 (1 - \cos \theta) \left(1 - 3 \frac{\Delta l}{l_0}\right)} \simeq 3 \frac{\Delta l}{l_0} \left(1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

ce qui donne à l'ordre 1 en Δl

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta l}{l_0}}$$

qui est bien le résultat affirmé par le texte.

29. On considère les 4 positions A, B, C et D de l'encensoir comme elles sont représentées sur la figure 7. On écrit tout d'abord la conservation de l'énergie mécanique entre A et B en considérant qu'en A la vitesse de l'encensoir est nulle et en prenant l'énergie potentielle nulle en B, ce qui donne

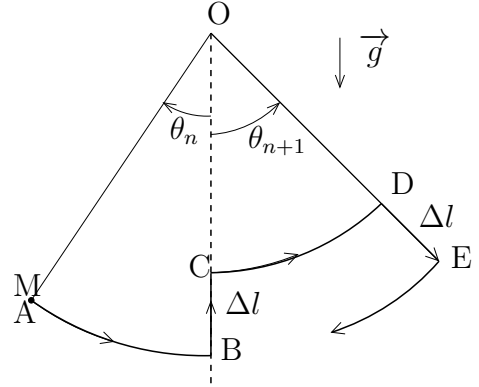
$$mgl_0(1 - \cos \theta_n) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

soit

$$v_B^2 = 2gl_0(1 - \cos \theta_n)$$

ensuite l'action des tireurs s'effectuant corde verticale, on peut écrire, comme déjà vu, la conservation du moment cinétique (calculé en O) de la masse entre B et C

$$l_0 v_B = (l_0 - \Delta l) v_C$$



ce qui permet d'écrire

$$v_C^2 = \left(\frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^2 v_B^2 = 2g \left(\frac{l_0^3}{(l_0 - \Delta l)^2} \right) (1 - \cos \theta_n)$$

On écrit ensuite la conservation de l'énergie mécanique entre C et D (corde raccourcie) avec $V_D = 0$ soit, en prenant l'énergie potentielle nulle en B et on orientant l'axe vertical des z vers le haut avec origine en O

$$mg(z_C - z_B) + \frac{1}{2}mv_C^2 = mg(z_D - z_B)$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg(z_D - z_C)$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = -mg(l_0 - \Delta l) \cos \theta_{n+1} + mg(l_0 - \Delta l)$$

ce qui donne

$$\cos \theta_{n+1} = 1 - \frac{1}{2g(l_0 - \Delta l)} v_C^2$$

soit avec la relation entre v_C et $\cos \theta_n$ déjà trouvée

$$\boxed{\cos \theta_{n+1} = 1 - \left(\frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^3 (1 - \cos \theta_n)}$$

avec $\theta_0 = 13^\circ$, $\Delta l = 3$ m et $l_0 = 21,5$ m, on calcule la suite des valeurs suivantes

$$\theta_1 = 16^\circ ; \theta_2 = 20^\circ ; \theta_3 = 26^\circ ; \theta_4 = 32^\circ ; \theta_5 = 41^\circ ; \theta_6 = 52^\circ ; \theta_7 = 66^\circ ; \theta_8 = 87^\circ$$

On atteint donc un angle supérieur à 82° au bout de seulement 8 demi-périodes, le modèle n'est pas en accord avec l'expérience, essentiellement car on considère que le raccourcissement de la corde se

fait de manière instantanée et quand la corde est verticale. On a aussi considéré que la vitesse de l'encensoir n'est que verticale aux points B et C, ce n'est évidemment pas le cas dans la réalité. Et surtout on a négligé les frottements de l'air ce qui est très abusif compte tenu notamment de la vitesse de l'encensoir...

30. On peut écrire le théorème du moment cinétique pour l'encensoir dans le référentiel non galiléen, d'origine O en translation par rapport au référentiel de la cathédrale. Cela suppose alors de considérer en plus du poids \vec{P} et de la tension du fil \vec{T} , la force d'inertie d'entraînement appliquée au point M qui s'exprime ici $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O) = -m\ddot{z}(O)\vec{e}_z = +m\omega^2 a \cos(\omega_f t)\vec{e}_z$. On applique le théorème du moment cinétique dans ce référentiel en calculant les moments en O soit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie})$$

avec $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de M dans le référentiel soit $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On obtient, en remarquant que le moment de la tension est nul,

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_y = -mgl \sin\theta \vec{e}_y - ml\omega_f^2 \cos(\omega_f t) \sin\theta \vec{e}_y$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(1 + \frac{a\omega_f^2}{g} \cos(\omega_f t) \right) \sin\theta = 0$$

ce qui est le résultat demandé avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ et $h = \frac{a\omega_f^2}{g}$.

31. On écrit dans ces conditions $\sin\theta \simeq \theta$ pour obtenir l'équation de Mathieu :

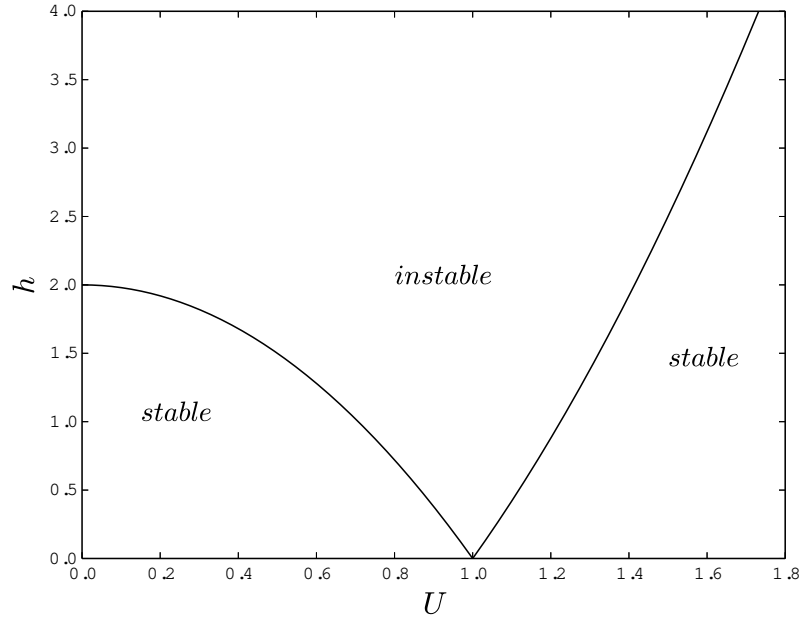
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + h \cos(\omega_f t) \right) \theta = 0$$

32. L'instabilité apparaît quand l'amplitude de $\theta(t)$ est croissante donc dès que $\mu > 0$ est une racine possible de l'équation bicarrée précédente. On constate sur cette équation bicarrée que la somme des racines (en μ^2) de cette équation est négative alors que le produit des racines vaut $(U^2 - 1)^2 - \frac{h^2}{4}$. Si ce produit est positif, la somme des racines étant négatives, les deux racines μ_1^2 et μ_2^2 seront négatives donnant des valeurs de μ imaginaires pures qui ne conduiront pas à une instabilité, l'amplitude restant alors bornée.

Le risque provient d'un produit de racines négatif. Alors les deux racines seront de signe opposé et il existera une racine telle que $\mu^2 > 0$ qui peut donner une valeur réelle positive pour μ conduisant à l'instabilité. Cette instabilité peut donc apparaître lorsque ce produit de racines est négatif soit pour

$$h^2 > h_c^2 = 4(U^2 - 1)^2$$

33. Avec le résultat précédent, la zone instable correspond au cas où $h > h_c$, ce qui donne :



34. Avec $h = \frac{a\omega_f^2}{g}$, on relie l'amplitude de l'excitation a au paramètre h . On constate sur le diagramme précédent que pour des valeurs de ω_f proches de $2\omega_0$ (c'est à dire U proche de 1), il suffit d'une petite valeur de h (donc de a) pour atteindre le domaine instable et donc déclencher l'instabilité. Par contre quand ω_f s'éloigne de $2\omega_0$ alors il faut une amplitude d'excitation de plus en plus importante pour déclencher l'instabilité.

On remarque aussi qu'avec ce modèle, pour $\omega_f = 2\omega_0$ ($U = 1$), l'instabilité prend naissance pour toute excitation d'amplitude non nulle aussi faible soit-elle.

35. La solution proposée est en $e^{\mu\omega_0 t}$, le temps caractéristique d'établissement de l'instabilité est donc $\tau = \frac{1}{\mu\omega_0}$, dans le cas où μ est bien entendu positif pour permettre la croissance de l'instabilité.

On cherche donc les solutions positives de

$$\mu^4 + 2\mu^2(1 + U^2) + (U^2 - 1)^2 - \frac{h^2}{4} = 0$$

avec ici $h^2 = h_c^2 + \varepsilon = 4(U^2 - 1)^2 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. L'équation pour μ devient donc

$$\mu^4 + 2\mu^2(1 + U^2) - \frac{\varepsilon}{4} = 0$$

Le discriminant de cette équation s'écrit $\Delta \simeq 4(1 + U^2)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{4(1 + U^2)^2}\right)$ et la racine positive peut alors s'écrire en tenant compte de $\varepsilon \ll 1$ sous la forme

$$\mu^2 \simeq \frac{\varepsilon}{8(1 + U^2)}$$

Cela donne pour racine positive $\mu \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon}{8(1 + U^2)}}$ et donc un temps τ

$$\tau = \sqrt{\frac{8(1 + U^2)}{\omega_0^2 \varepsilon}}$$

On constate bien que ce temps diverge quand ε tend vers 0, l'apport d'énergie étant alors très faible par rapport à la situation critique.

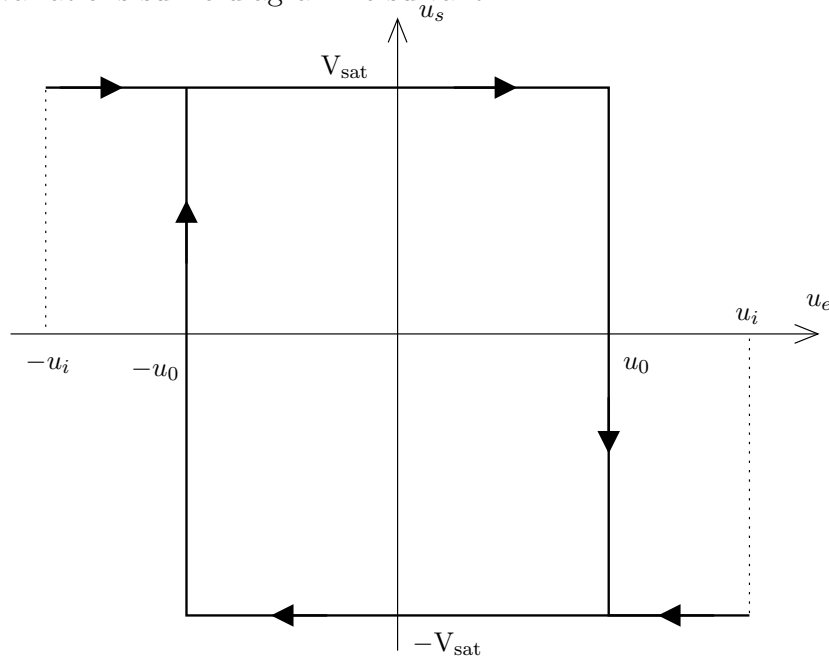
Dans le cas où $\omega_f = 2\omega_0$, alors $U = 1$ et $h_c = 0$. Ainsi pour $h = \varepsilon$ tendant vers 0, il peut y avoir naissance de l'instabilité pour des valeurs très faibles de h mais comme on vient de le voir dans ce cas, le temps caractéristique d'établissement de l'instabilité est alors très long.

E- Bistabilité optique

36. Ici $\varepsilon = V_+ - V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_s - u_e$. C'est alors le signe de ε qui détermine celui de u_s qui ne peut prendre que les valeurs $\pm V_{\text{sat}}$. Partant de la situation initiale donnée par l'énoncé, $u_s = -V_{\text{sat}}$ et $u_e > \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{\text{sat}}$ (ce qui assure bien $\varepsilon < 0$), on diminue la valeur de u_e . Le signe de ε va alors changer quand $-\frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{\text{sat}} - u_e$ va devenir positif c'est à dire pour $u_e < -u_0$. Puis u_e poursuit sa décroissance jusqu'à $-u_i$ et ε reste positif et $u_s = +V_{\text{sat}}$.

Ensuite u_e croît à partir de $-u_i$, u_s étant à la valeur V_{sat} . Tant que $\varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{\text{sat}} - u_e$ reste positif u_s conserve la valeur V_{sat} . Le signe de ε va changer quand u_e va devenir supérieur à $u_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_{\text{sat}}$, alors ε devient négatif et u_s devient égal à $-V_{\text{sat}}$. Ensuite u_e continue à croître jusqu'à u_i sans changement de signe de ε .

37. On résume ces variations sur le diagramme suivant :



On peut parler de cycle d'hystérésis car la valeur de u_s ne dépend pas de la valeur de u_e uniquement mais de « l'histoire » de u_e . Si u_e atteint une valeur comprise entre $-u_0$ et u_0 par valeurs supérieures alors $u_s = -V_{\text{sat}}$ et si cette même de u_e valeur est atteinte depuis des valeurs inférieures alors $u_s = +V_{\text{sat}}$.

On peut parler de bistabilité car pour une valeur de u_e comprise entre $-u_0$ et u_0 , deux valeurs de u_s sont possibles.

38. L'amplitude A_{2_1} s'obtient à partir de A_1 en tenant compte de la transmission à travers la première

lame, des deux réflexions sur les miroirs, de la propagation sur une longueur $2L$ d'un aller-retour et de l'atténuation sur cette même longueur $2L$. On obtient alors

$$A_{2_1} = A_1 t r^2 e^{-2ikL} e^{-\frac{\alpha}{2}2L}$$

soit

$$A_{2_1} = A_1 t r^2 e^{2i\Phi} \quad \text{avec} \quad \Phi = -kL + i\frac{\alpha L}{2}$$

De même on obtient A_{2_p} en remarquant que chaque aller-retour affecte l'amplitude en $x = 0$ du coefficient $r^2 e^{-2ikL} e^{-\frac{\alpha}{2}2L} = r^2 e^{2i\Phi}$ tenant compte des deux réflexions, de la propagation et de l'atténuation. Ainsi

$$A_{2_p} = A_1 t \left(r^2 e^{2i\Phi} \right)^p$$

À l'intérieur de l'interféromètre, en $x = 0$, l'amplitude A_2 est obtenue en sommant toutes ces amplitudes A_{2_p} soit

$$A_2 = t A_1 \sum_n \left(r^2 e^{2i\Phi} \right)^n = \frac{t A_1}{1 - r^2 e^{2i\Phi}}$$

soit

$$A_2 = \frac{t A_1}{1 - r^2 e^{(-2ikL - \alpha L)}}$$

39. On calcule le module carré de l'expression obtenue ci-dessus :

$$|A_2|^2 = \frac{T |A_1|^2}{1 + r^4 e^{-2\alpha L} - 2r^2 e^{-\alpha L} \cos(2kL)}$$

En utilisant $\cos(2kL) = 1 - 2\sin^2(kL)$ et les définitions de I_2 , R et T on a :

$$I_2 = \frac{1}{2} |A_2|^2 = \frac{1}{2} \frac{T |A_1|^2}{(1 - R e^{-\alpha L})^2 + 4R \sin^2(kL) e^{-\alpha L}}$$

À la résonance $\sin^2(kL) = 0$ et pour des faibles absorptions $\alpha L \ll 1$ on a :

$$I_2 = \frac{T I_1}{(1 - R(1 - \alpha L))^2}$$

40. On introduit $C(\alpha) = \frac{R\alpha L}{1-R}$ et on remplace :

$$I_2 = \frac{1}{T} \frac{I_1}{(1 + C(\alpha))^2}$$

Bistabilité d'absorption

41. On peut écrire en utilisant le coefficient de transmission T que $I_3 = T I_2$ et donc $I_3 = \frac{T}{2} I$. On pose

$$u = \frac{I}{I_s} \quad \text{donc aussi} \quad I = u I_s \quad \text{ce qui donne bien} \quad \boxed{\frac{I_3}{I_s} = \frac{T}{2} u}.$$

On utilise le paramètre $C(\alpha) = \frac{R}{1-R} \frac{\alpha_0 L}{1 + I/I_s} = \frac{R}{1-R} \frac{\alpha_0 L}{1 + 2I_2/I_s} = \frac{C(\alpha_0)}{1 + 2I_2/I_s}$. Toujours avec $I = 2I_2$, on obtient avec le résultat de la question **40.** :

$$I_1 = T \frac{I}{2} \left(1 + \frac{C(\alpha_0)}{1 + I/I_s} \right)^2 \quad \text{et toujours} \quad I_3 = T I_2 = T \frac{I}{2}$$

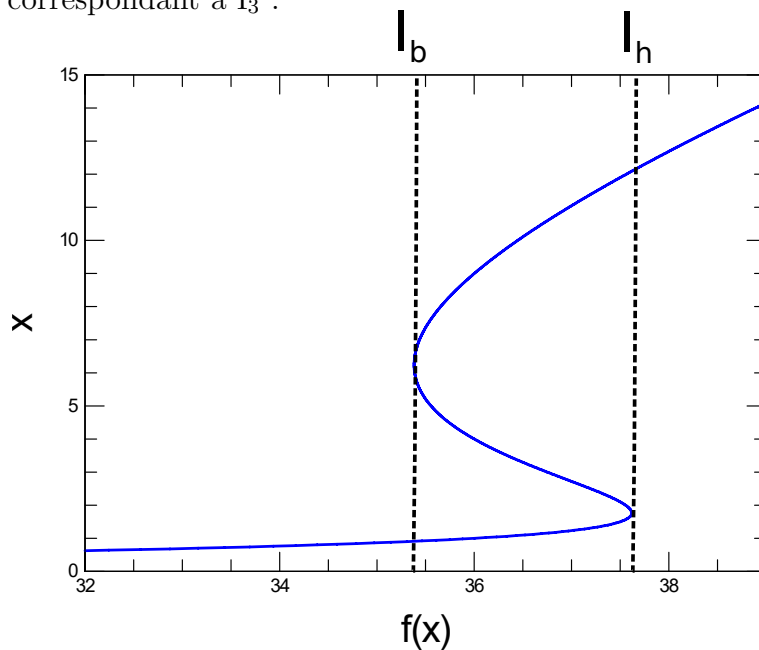
L'expression précédente de I_1 combinée à $u = \frac{I}{I_s}$ permet d'écrire

$$\boxed{\frac{I_1}{I_s} = \frac{T}{2} f(u) \quad \text{avec} \quad f(u) = u \left(1 + \frac{C(\alpha_0)}{1+u} \right)^2}$$

42. On étudie la fonction $f(u)$. Elle a un zéro en $u = 0$ et des extrema quand df/du s'annule, c'est à dire quand l'équation suivante est satisfaite : $u^2 + u(2 - C(\alpha_0)) + C(\alpha_0) + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est strictement positif pour $C(\alpha_0) \geq 8$. La valeur critique est donc $C_c = 8$. Sur la figure on voit que pour $C(\alpha_0) > 8$, il y a bien deux extrema.

Si $C(\alpha_0) < 8$ la dérivée ne s'annule jamais, donc $f(u)$ est une fonction toujours croissante. Si $C(\alpha_0) = 8$ la dérivée s'annule en un seul point, $u = 3$.

43. Il suffit de reprendre le graphique tracé précédemment en utilisant en abscisse $f(u)$, correspondant à I_1 et en ordonnée u , correspondant à I_3 :



44. On suppose que l'intensité en entrée dans l'interféromètre est I_1 avec $I_b < I_1 < I_h$. Entre I_b et I_h on a une solution instable (branche du milieu sur la figure précédente) et deux solutions stables. On peut forcer le système à avoir une transition vers un état haut en envoyant une impulsion d'intensité telle que l'intensité totale dépasse I_h . Pour que le système revienne vers l'état bas on peut bloquer l'impulsion.

Interrupteurs optiques

45. $E_A = 2r_t E_0 e^{i\pi}$.

46. $E_B = E_0 e^{i\pi} (r^2 + t^2) = E_0 e^{i\pi} (T - R)$.

47. $|E_A|^2 = |E_0|^2 4R(1 - R) = |E_0|^2$ et $|E_B|^2 = 0$

48. Le déphasage $\Delta\phi$ induit par la différence d'indice est $\Delta\phi = \omega \Delta n L / c$.

49. On calcule E_A et E_B et puis on passe au module carré, en utilisant $R = T = 1/2$. En fixant l'origine des phases on peut écrire :

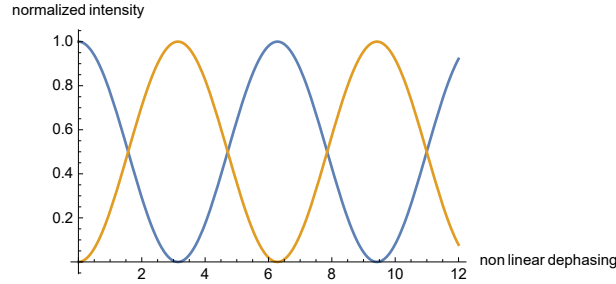
$$E_A = \underline{t}E_0\underline{r}e^{i\pi}(1 + e^{i\Delta\Phi}) = \underline{t}E_0\underline{r}e^{i\pi}e^{\frac{i\Delta\Phi}{2}}(2 \cos(\Delta\Phi/2)) \rightarrow I_A = I_0 \cos^2(\Delta\Phi/2)$$

$$E_B = E_0e^{i\pi}(\underline{r}^2 + \underline{t}^2e^{i\Delta\Phi}) = \frac{1}{2}E_0e^{i\pi}(e^{i\Delta\Phi} - 1) = \frac{1}{2}E_0e^{i\pi}e^{\frac{i\Delta\Phi}{2}}(2i \sin(\Delta\Phi/2)) \rightarrow I_B = I_0 \sin^2(\Delta\Phi/2)$$

Si on somme les deux intensités on vérifie bien la conservation de l'énergie.

50. On remplace Δn par γI : $\Delta\Phi = \gamma\omega lL/c$ avec I l'intensité dans le milieu d'indice n' c'est à dire $I = TI_0$ et on trouve l'expression demandée.

51. On trace I_A (courbe bleue) et I_B (courbe orange) en fonction de $\Delta\Phi$.



52. Pour le déphasage $\Delta\phi_{NL} = \pi$ on a $I_A = 0$ et $I_B = I_0$ et pour le déphasage $\Delta\phi_{NL} = 0$ on a $I_A = I_0$ et $I_B = 0$. On considère alors 0 et I_0 respectivement comme signal bas et signal haut. Le dispositif peut être considéré comme un trieur d'impulsions car l'intensité du signal d'entrée détermine s'il va sortir par la porte A ou B. La condition $\Delta\phi_{NL} = \pi$ permet un fonctionnement optimal pour le trieur d'impulsions.

F-Instabilité de Rayleigh-Bénard

53. Le « moteur » du mouvement ascendant est le déséquilibre entre la poussée d'Archimède et le poids. Le fluide chaud arrivant dans une zone froide subit une poussée d'Archimède supérieure en norme à son poids. La diffusion thermique dans le fluide ainsi que les phénomènes de diffusion visqueuse tendent à s'y opposer.

54. Loi de Fourier $\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T}$. Dans cette expression, \vec{j}_{th} représente le vecteur densité de courant thermique dont le flux à travers une surface est la puissance thermique qui traverse cette surface. λ est la conductivité thermique et T la température.

En considérant un volume V quelconque (délimité par la surface fermée S) sur lequel on réalise un bilan thermique entre les instants t et $t + dt$, on peut écrire, en notant U l'énergie interne du système :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = - \left(\oint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Avec un modèle unidimensionnel comme ici, on peut choisir comme système le fluide compris dans une tranche de section S_0 comprise entre y et $y + dy$. En écrivant $\vec{j}_{th} = j_{th}(y, t)\vec{e}_y$, l'équation précédente devient alors

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \rho c(S_0 dy)dT = (-j_{th}(y + dy, t)S_0 + j_{th}(y, t)S_0)dt$$

soit

$$\rho c(S_0 dy) \frac{\partial T}{\partial t} = -S_0 \frac{\partial j_{th}}{\partial y}$$

La loi de Fourier s'écrit dans cette situation $j_{th}(y, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$, ce qui donne l'équation aux dérivées partielles pour $T(y, t)$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{où} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

Par analyse dimensionnelle on peut alors relier le temps caractéristique τ_{th} à la distance caractéristique d en utilisant l'équation ci-dessus qui permet d'obtenir

$$D_{th} \frac{1}{d^2} = \frac{1}{\tau_{th}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau_{th} = \frac{d^2}{D_{th}}}$$

55. Pour un fluide à l'équilibre $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et donc $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ ce qui donne $T_{\text{éq}}(y) = Ay + B$. Avec $T(0) = T_0 + \Delta T$ et $T(a) = T_0$, on obtient

$$\boxed{T_{\text{éq}}(y) = T_0 + \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T}$$

56. L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Le 1er terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ représente l'accélération locale, le deuxième $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ l'accélération convective provenant du fait que la particule fluide se déplace en des lieux où la vitesse varie. Le troisième représente la résultante volumique des forces de pressions, le quatrième est le poids volumique et le dernier représente la résultante volumique des forces visqueuses.

Avec la simplification suggérée on obtient $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$ qui s'écrit sous la forme d'une équation de diffusion

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

En faisant jouer le rôle de D_{th} à $\frac{\eta}{\rho}$, on définit de même le temps caractéristique de diffusion visqueuse

$$\boxed{\tau_v = \frac{\rho d^2}{\eta}}$$

57. On obtient $\boxed{\text{Pr} = \frac{\nu}{D_{th}}}$.

Pour l'eau on a $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $c = 4180 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $\lambda = 0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$ ce qui donne, en ordre de grandeur $D_{th} = 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $\text{Pr} = 10$ pour l'eau.

58. En notant m la masse de fluide contenue dans le volume V , on peut écrire $V = \frac{m}{\rho}$ où ρ et V

dépendent de la température. Cela donne

$$\alpha = \frac{\rho}{m} \left(\frac{\partial \left(\frac{m}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_p = \frac{\rho}{m} \left(-\frac{m}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

En négligeant la variation de ρ avec la pression, on peut donc écrire

$$\frac{d\rho}{dT} = -\alpha\rho$$

ce qui donne en considérant α indépendant de la température

$$\boxed{\rho = \rho_0 e^{-\alpha(T-T_0)}}$$

Pour des valeurs de T proches de T_0 , on obtient $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$.

59. À l'équilibre le gradient de température vertical est uniforme de sorte que $\delta T = -\frac{\Delta T}{a}\delta y$. Avec la loi reliant la masse volumique à la température, on obtient pour $\delta\rho = -\alpha\rho_0\delta T$.

60. La masse de la particule fluide peut être calculée lorsqu'elle était à l'équilibre donc $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, son poids s'écrit $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho\vec{g}$. La force d'Archimède qu'elle subit à l'instant $t + \delta t$, est celle d'une particule de volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ placée dans un fluide de masse volumique $\rho + \delta\rho$ soit $\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho + \delta\rho)\vec{g}$.

On obtient alors en sommant ces deux forces $\vec{F}_B = -\frac{4}{3}\pi r^3\delta\rho\vec{g}$ qui s'écrit

$$\boxed{\vec{F}_B = F_B \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad F_B = \frac{4}{3}\pi r^3 g \delta\rho}$$

On a vu que $\delta\rho > 0$, cette force tend donc à déplacer la particule fluide dans les sens des y croissants donc elle tend à entretenir le mouvement ascendant de la particule.

61. En régime permanent, avec les notations précédentes $F_B - F_v = 0$, ce qui s'écrit aussi

$$\frac{4}{3}\pi r^3\delta\rho g - 6\pi\eta r v = 0$$

ce qui donne avec $\delta\rho = -\alpha\rho_0\delta T$ obtenu à la question **59**.

$$\boxed{v = -\frac{2}{9} \frac{r^2 g \alpha \rho_0 \delta T}{\eta}}$$

On peut obtenir τ_d temps caractéristique de déplacement de la particule fluide sur la distance δy à cette vitesse v par $\tau_d = \frac{\delta y}{v}$, ce qui donne avec $\delta T = -\frac{\Delta T}{a}\delta y$ et l'expression précédente de v

$$\boxed{\tau_d = \frac{9\eta a}{2r^2 \alpha g \rho_0 \Delta T}}$$

62. Comme déjà vu plus haut $\tau'_{th} = \frac{r^2}{D_{th}}$.

Pour que l'instabilité puisse subsister dans la couche de fluide le temps τ_d doit être plus petit que

le temps τ'_{th} . En effet le déplacement du fluide doit se faire sur un temps plus court que celui de thermalisation du fluide par diffusion thermique pour que le « moteur » de l'instabilité subsiste. Si, durant son mouvement ascendant, la particule de fluide a le temps de se mettre à l'équilibre thermique avec le fluide environnant, elle ne montera plus... Il faut donc

$$\tau'_{th} = \frac{r^2}{D_{th}} > \tau_d = \frac{9\eta a}{2r^2 \alpha g \rho_0 \Delta T}$$

63. Cela s'écrit aussi

$$\frac{r^4 \alpha g \rho_0 \Delta T}{D_{th} \eta a} > \frac{9}{2}$$

Le cas où toute la couche est déstabilisée correspond à $r = a/2$, on obtient alors

$$\frac{a^3 \alpha g \rho_0 \Delta T}{16 D_{th} \eta} > \frac{9}{2}$$

ce qui donne avec $\eta/\rho_0 = \nu$

$$\boxed{\frac{\alpha g a^3 \Delta T}{\nu D_{th}} > 72}$$

On trouve l'expression demandée avec $Ra_c = 72$ pour ce modèle.

64. Pour un écoulement incompressible $\text{div } \vec{v} = 0$.

65. Comme à la question 56., on écrit

$$\boxed{\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}}$$

66. On obtient une expression similaire à celle de la question 54. en ajoutant en plus le terme de convection dans la dérivée temporelle de la température .

67. On utilise la loi de température $T(y) = T_0 + (1 - \frac{y}{a})\Delta T$ et l'équation d'état du fluide $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$. On obtient alors

$$\boxed{\rho_{\text{éq}}(y) = \rho_0 \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a} \right) \Delta T \right)}$$

68. De l'équation de Navier-Stokes écrite pour un fluide au repos ($\vec{v} = \vec{0}$) on obtient $-\frac{1}{\rho_{\text{éq}}} \text{grad } p_{\text{éq}} + \vec{g} = \vec{0}$, ce qui donne une dépendance de $p_{\text{éq}}$ en fonction de la seule variable y selon la loi

$$\frac{dp_{\text{éq}}}{dy} = -\rho_{\text{éq}} g = -\rho_0 g \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a} \right) \Delta T \right)$$

soit avec $p(a) = p_0$

$$\boxed{p_{\text{éq}}(y) = p_0 + \rho_0 g (a - y) - \alpha \rho g \frac{\Delta T}{2a} (a - y)^2}$$

69. La première équation est celle obtenue à la question **64.**, elle est inchangée.

Pour la deuxième on écrit l'équation de diffusion thermique : $\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T\right) = D_{\text{th}}\Delta T$ pour $T = T_{\text{éq}}(y) + \theta$, ce qui donne, compte tenu de $\frac{\partial T_{\text{éq}}}{\partial t} = 0$ et $\Delta T_{\text{éq}} = 0$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(T_{\text{éq}}(y) + \theta) = D_{\text{th}}\theta$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\theta = D_{\text{th}}\theta - (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T_{\text{éq}}(y)$$

$T_{\text{éq}}$ ne dépendant que de la variable y , $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T_{\text{éq}}(y) = \vec{v} \cdot \frac{dT_{\text{éq}}}{dy} \vec{e}_y$ et avec $\frac{dT_{\text{éq}}}{dy} = -\frac{\Delta T}{a}$ (cf. question **55.**), on obtient

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\theta = \frac{\Delta T}{a} \vec{v} \cdot \vec{e}_y + D_{\text{th}}\theta}$$

Pour la troisième équation, il faut reprendre l'équation de Navier-Stokes avec $p = p_{\text{éq}} + \Pi$ ce qui donne

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p_{\text{éq}} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}$$

avec $-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p_{\text{éq}} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_{\text{éq}}}{dy} \vec{e}_y = \frac{\rho_0}{\rho} g \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T\right) \vec{e}_y$ comme on l'a vu à la question **68.**

L'équation de Navier-Stokes devient

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = g \left(-1 + \frac{\rho_0}{\rho} \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T\right)\right) \vec{e}_y - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \nu \Delta \vec{v}$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = g \frac{\rho_0}{\rho} \left(-\frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T\right)\right) \vec{e}_y - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \nu \Delta \vec{v}$$

Or selon l'équation d'état du fluide $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ et ici $T = T_{\text{éq}} + \theta = T_0 + \left(1 - \frac{y}{a}\right)\Delta T + \theta$, donc

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T - \alpha \theta$$

alors

$$-\frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{y}{a}\right) \Delta T\right) = \alpha \theta$$

et en reportant cette expression dans la dernière forme obtenue pour l'équation de Navier-Stokes, il vient

$$\boxed{\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = \frac{\rho_0}{\rho} \alpha \theta g \vec{e}_y - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \nu \Delta \vec{v}}$$

70. En ne gardant que les terme d'ordre 1, le première équation n'est pas modifiée, le terme en $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\theta$ disparaît de la deuxième ainsi que celui $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ dans la troisième ce qui donne avec

$\rho \simeq \rho_0$ pour ne garder que des termes d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\Delta T}{a} \vec{v} \cdot \vec{e}_y + D_{\text{th}} \Delta \theta \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \alpha \theta g \vec{e}_y - \frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Pi + \nu \Delta \vec{v} \end{array} \right.$$

71. L'équation $\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$ devient alors avec les solutions proposées

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial y_1} = 0$$

L'équation $\frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} = \operatorname{Ra} \vec{v}_1 \cdot \vec{e}_y + \Delta \theta_1$ devient

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} = w \operatorname{Ra} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2}$$

L'équation $\frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t_1} = \theta_1 \vec{e}_y - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Pi_1 + \Delta \vec{v}_1$ projetée sur \vec{e}_x donne

$$\frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial u}{\partial t_1} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$$

et projetée sur \vec{e}_y

$$\frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial w}{\partial t_1} = \theta_1 - \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}$$

d'où les 4 équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} = w \operatorname{Ra} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2} \\ \frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial u}{\partial t_1} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \\ \frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial w}{\partial t_1} = \theta_1 - \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \end{array} \right.$$

72. Sur les plaques, en $y = 0$ (c'est à dire $y_1 = 0$) et en $y = a$ (c'est à dire $y_1 = 1$) la vitesses n'a pas de composante verticale donc

$$w(x_1, 0, t_1) = w(x_1, 1, t_1) = 0$$

De même sur les plaques les températures sont fixées donc les fluctuations nulles de sorte que

$$\theta_1(x_1, 0, t_1) = \theta_1(x_1, 1, t_1) = 0$$

En imposant les deux conditions $\frac{\partial u}{\partial y_1}(x_1, 0, t_1) = \frac{\partial u}{\partial y_1}(x_1, 1, t_1) = 0$, on néglige l'action tangentielle des plaques sur le fluide d'où le nom de conditions *libre-libre*.

73. Le nombre n représente le nombre de rouleaux qu'on peut observer dans la hauteur a de la cellule. Si $n = 1$, la vitesse verticale w ne s'annule que sur les plaques. Si $n = 2$, on observera deux rouleaux l'un au dessus de l'autre dans l'épaisseur a , si $n = 3$, 3 rouleaux dans l'épaisseur. Cela fait penser aux modes observables par exemple sur une corde vibrante.

Le nombre k quantifie la fréquence spatiale en x_1 des rouleaux, il s'apparente à un nombre d'onde. L'instabilité peut apparaître si β est à partie réelle positive permettant une croissance des vitesses à partir d'une petite perturbation.

74. Les deux dernières équations obtenues à la question **71.** sont les seules à faire intervenir les dérivées partielles spatiales de Π_1 , elles donnent

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$$

et

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial w}{\partial t_1} + \theta_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}$$

En dérivant la première par rapport à y_1 et la seconde par rapport à x_1 on obtient la dérivée seconde de Π_1 par rapport à x_1 et y_1 , l'ordre n'important pas pour des variables indépendantes. On égale donc ces deux expressions pour obtenir

$$-\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial t_1} \right)}{\partial y_1} + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \right)}{\partial y_1} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial t_1} \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \right)}{\partial x_1}$$

Avec les formes proposées pour les fonctions u , w et θ_1 , on obtient après simplification par $\sin(kx_1) \sin(n\pi y_1) e^{\beta t_1}$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \beta n \pi u_0 + k^2 n \pi u_0 + n^3 \pi^3 u_0 = \frac{1}{\text{Pr}} \beta k w_0 - k \theta_0 + k^3 w_0 + k n^2 \pi^2 w_0$$

L'équation $\frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} = w \text{Ra} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y_1^2}$ donne après simplification par $\cos(kx_1) \sin(n\pi y_1) e^{\beta t_1}$

$$\beta \theta_0 = \text{Ra} w_0 - (k^2 + n^2 \pi^2) \theta_0$$

et l'équation $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial y_1} = 0$ donne après simplification par $\cos(kx_1) \cos(n\pi y_1) e^{\beta t_1}$

$$k u_0 + n \pi w_0 = 0$$

On obtient donc le système

$$\boxed{\begin{cases} k u_0 + n \pi w_0 = 0 \\ \beta \theta_0 = \text{Ra} w_0 - (k^2 + n^2 \pi^2) \theta_0 \\ \frac{1}{\text{Pr}} \beta n \pi u_0 + k^2 n \pi u_0 + n^3 \pi^3 u_0 = \frac{1}{\text{Pr}} \beta k w_0 - k \theta_0 + k^3 w_0 + k n^2 \pi^2 w_0 \end{cases}}$$

75. La première de ces équations permet d'écrire $u_0 = -\frac{n\pi}{k} w_0$ qu'on peut injecter dans la troisième pour obtenir le système

$$\begin{cases} \beta \theta_0 = \text{Ra} w_0 - (k^2 + n^2 \pi^2) \theta_0 \\ -\frac{1}{\text{Pr}} \beta \frac{n^2 \pi^2}{k} w_0 - k n^2 \pi^2 w_0 - \frac{n^4 \pi^4}{k} w_0 = \frac{1}{\text{Pr}} \beta k w_0 - k \theta_0 + k^3 w_0 + k n^2 \pi^2 w_0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \beta\theta_0 = \text{Ra } w_0 - (k^2 + n^2\pi^2)\theta_0 \\ -\frac{1}{\text{Pr}}\beta n^2\pi^2 w_0 - k^2 n^2\pi^2 w_0 - n^4\pi^4 w_0 = \frac{1}{\text{Pr}}\beta k^2 w_0 - k^2\theta_0 + k^4 w_0 + k^2 n^2\pi^2 w_0 \end{cases}$$

ou après réarrangement

$$\begin{cases} \text{Ra } w_0 - (\beta + k^2 + n^2\pi^2)\theta_0 = 0 \\ (k^2 + n^2\pi^2)\left(k^2 + n^2\pi^2 + \frac{1}{\text{Pr}}\beta\right)w_0 - k^2\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système possède une autre solution que la solution triviale $w_0 = \theta_0 = 0$ (qui ne correspondrait pas à l'observation de l'instabilité), il faut que son déterminant soit nul soit

$$(\beta + k^2 + n^2\pi^2)(k^2 + n^2\pi^2)\left(k^2 + n^2\pi^2 + \frac{1}{\text{Pr}}\beta\right) - k^2\text{Ra} = 0$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{1}{\text{Pr}}\beta^2 + (k^2 + n^2\pi^2)\left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right)\beta + (k^2 + n^2\pi^2)^2 - \frac{k^2}{k^2 + n^2\pi^2}\text{Ra} = 0$$

76. Le discriminant de cette équation du second degré vaut

$$\Delta = (k^2 + n^2\pi^2)^2\left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right)^2 + 4\frac{k^2}{\text{Pr}(k^2 + n^2\pi^2)}\text{Ra} - 4\frac{(k^2 + n^2\pi^2)^2}{\text{Pr}}$$

Si il est négatif, les racines sont complexes et à partie réelle négative valant $-\frac{(k^2 + n^2\pi^2)\left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right)}{2}$ et ne permettant pas le développement de l'instabilité.

Si le discriminant est positif, les racines sont donc réelles et leur somme est négative car les coefficients des termes de degré 2 et 1 sont positifs. Pour avoir une racine positive qui conduit à l'instabilité, il faut donc que le produit des racines soit négatif (donnant ainsi une racine positive et une négative dont la somme est négative pour obtenir une somme négative). Il faut pour cela que le terme de degré 0 soit négatif soit

$$(k^2 + n^2\pi^2)^2 - \frac{k^2}{k^2 + n^2\pi^2}\text{Ra} < 0$$

ou encore

$$\text{Ra} > \frac{(k^2 + n^2\pi^2)^3}{k^2}$$

On vérifie bien que dans ce cas le discriminant est positif.

77. Si les rouleaux qui apparaissent occupent toute la hauteur a de la cellule alors $n = 1$. On doit donc chercher la valeur minimale de la fonction de k égale à $\frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2}$. En calculant sa dérivée par rapport à k , on montre que cette fonction est minimale en $k = k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ce qui donne

$$\text{Ra}_c = \frac{\left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right)^3}{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{27}{4}\pi^4 = 658$$

Pour la taille des rouleaux, leur hauteur est a et la période spatiale en x_1 est donc $\frac{2\pi}{k_c} = 2\sqrt{2}$ et donc, en repassant en grandeurs dimensionnées, la période spatiale selon x des rouleaux, qu'on peut assimiler à leur largeur est, dans ce mode, $2\sqrt{2}a$.