

# Piézoélectricité et application à l'optique adaptative

## Proposition de corrigé

### 1 Modèle électrique du quartz

**1** On combine les deux équations de  $(EC)$  en injectant  $q$  tiré de la première dans la seconde. Cela donne :

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} + (k - C\alpha^2)x = -C\alpha u$$

Par dérivation, on obtient  $(E)$  :

$$m\ddot{v} + \delta\dot{v} + (k - C\alpha^2)v = -C\alpha \frac{du}{dt} \quad (E)$$

**2** Un système stable est tel qu'en absence d'excitation extérieure ( $u = 0$ ) et après avoir subi un écart à sa position d'équilibre (qui est ici  $v = 0$ ), il y revient. On attend donc, pour un système stable, des solutions de  $(E)$  non divergentes pour toute condition initiale.

Pour  $u = 0$ , l'équation  $(E)$  est homogène, l'équation caractéristique associée est  $mX^2 + \delta X + (k - C\alpha^2) = 0$ . Le discriminant est :

$$\Delta = \delta^2 - 4m(k - C\alpha^2)$$

– Si  $\Delta > 0$ , le polynôme a deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , dont le produit est  $r_1 r_2 = (k - C\alpha^2)/m$  et la somme  $r_1 + r_2 = -\delta/m$ .

La stabilité est assurée si ces deux racines sont négatives, c'est-à-dire si  $r_1 r_2 > 0$  et  $r_1 + r_2 < 0$ . C'est équivalent à  $k - C\alpha^2 > 0$ .

– Si  $\Delta = 0$ , la racine double  $-\delta/(2m)$  assure que les solutions tendent vers 0.

– Si  $\Delta < 0$ , le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées,  $(-\delta \pm j\sqrt{-\Delta})/(2m)$ , donc les solutions de  $(E)$  tendent vers 0 ( $\delta/m > 0$ ).

Finalement, la stabilité est assurée si et seulement si  $k - C\alpha^2 > 0$ .

**3** L'équation demandée est :

$$\ddot{v} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{v} + \omega_0^2 v = -\frac{C\alpha}{m} \frac{du}{dt} \quad (E)$$

**4** Pour  $t < 0$ , on a la condition  $u(t) = 0$  et la solution  $v(t) = 0$ .

Pour  $t > 0$ , on a  $u(t) = \text{Cte} = E$  donc  $du/dt = 0$  avec  $v(0^+) = 0$ .

Ainsi,  $(E)$  est homogène et a pour discriminant  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ . On a  $\Delta < 0$  pour  $Q > 1/2$ . Les racines de l'équation caractéristique sont alors :

$$X_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left( 1 \mp j\sqrt{4Q^2 - 1} \right)$$

Notons  $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\omega'_0 = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ . Alors la solution générale de  $(E)$  vérifiant  $v(t = 0) = 0$  est :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega'_0 t)$$

Si  $Q \gg 1$  alors  $\omega'_0 \approx \omega_0$  : les oscillations ont lieu à la pulsation propre de l'oscillateur non amorti.

**5** L'enveloppe du signal est la fonction  $v_0(t) = Ae^{-t/\tau}$ . Sa valeur initiale est  $v_0(0) = A$ . La condition :

$$v_0(t) < 0,05v_0(0)$$

équivalent donc à :

$$t > \tau_q = \tau \ln(1/0,05) = \tau \ln 20 \approx 3\tau$$

On a donc  $\tau_q = \frac{2Q \ln 20}{\omega_0} \approx \frac{6Q}{\omega_0}$ .

Les oscillations du signal s'effectuent à la pseudo-période  $T' = 2\pi/\omega'_0$ , donc :

$$\frac{\text{temps de réponse}}{\text{période d'oscillation}} = \frac{\tau_q}{T'} = \frac{\omega'_0 Q \ln 20}{\omega_0 \pi} \approx \frac{\omega'_0 3Q}{\omega_0 \pi} \approx \frac{\omega'_0}{\omega_0} Q$$

Enfin, si  $Q \gg 1$ , alors  $\omega'_0 \approx \omega_0$ , de sorte que :

$$\frac{\text{temps de réponse}}{\text{période d'oscillation}} \approx Q$$

Cela permet d'interpréter le facteur de qualité  $Q$  comme le nombre d'oscillations du système précédant une diminution de l'amplitude en-deçà de 5% de la valeur initiale.

**6** En convention récepteur,  $i$  est de sens contraire à  $u$  dans la figure 1b de l'énoncé et  $\underline{i} = j\omega\underline{q}$ . Réécrivons (EC) en notations complexes :

$$\begin{cases} \frac{\underline{q}}{C} + \alpha\underline{x} = \underline{u} \\ m\underline{\ddot{x}} + \delta\underline{\dot{x}} + k\underline{x} + \alpha\underline{q} = 0 \end{cases} \quad (EC)$$

On exprime  $\underline{x}$  en fonction de  $\underline{q}$  puis on introduit le courant  $\underline{i} = j\omega\underline{q}$ , ce qui conduit à une relation complexe entre courant et tension. Enfin, l'impédance est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega} \left[ \frac{1}{C} - \frac{\alpha^2}{k + j\delta\omega - m\omega^2} \right]$$

En réarrangeant un peu, on peut écrire :

$$\underline{Z} = \frac{k - C\alpha^2}{j\omega Ck} \times \frac{1 + j\omega \frac{\delta}{k - C\alpha^2} - \frac{m}{k - C\alpha^2} \omega^2}{1 + j\omega \frac{\delta}{k} - \frac{m}{k} \omega^2}$$

**7** Les règles d'association série et parallèle permettent d'écrire pour l'association proposée :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = jC_p\omega + \frac{1}{R_s + \frac{1}{jC_s\omega} + jL_s\omega}$$

Soit, après réarrangement :

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{j\omega(C_s + C_p)} \frac{1 + jR_sC_s\omega - L_sC_s\omega^2}{1 + j\frac{R_sC_sC_p}{C_s+C_p}\omega - \frac{L_sC_sC_p}{C_s+C_p}\omega^2}$$

En identifiant tous les coefficients de  $\omega$  dans les expressions de  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}_e$ , on peut exprimer :

$$\begin{cases} C_p = C \\ C_s = \frac{\alpha^2 C^2}{k - C\alpha^2} \\ R_s = \frac{\alpha^2 C^2}{m} \\ L_s = \frac{C^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

**8**  $R_s = 0$  correspond à  $\delta = 0$  ou encore  $Q$  infini. On a ainsi dans l'expression de  $\underline{Z}_e$  :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} = \frac{1}{j\omega(C_s + C_p)} \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{1 - \frac{L_s C_s C_p}{C_s + C_p} \omega^2}$$

On a alors la forme proposée par l'énoncé avec :

$$\begin{cases} \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \\ \omega_p = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{L_s C_s C_p}} = \sqrt{\frac{1}{L_s} \left( \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \right)} \end{cases}$$

Il apparaît donc que  $\omega_s$  est la pulsation de résonance de l'ensemble  $\{L_s, C_s\}$  série. Et  $\omega_p$  est la pulsation de résonance de  $L_s$  en série avec  $\{C_s, C_p\}$  en parallèle.

En outre,  $\omega_s = \omega_0$ , pulsation de résonance du quartz (ou pulsation propre d'oscillation).

L'expression de l'impédance  $\underline{Z}$  montre que celle-ci est nulle pour  $\omega = \omega_s$  ; en d'autres termes le courant parcourant le quartz est alors infini, il s'agit d'une résonance en courant. Pour  $\omega = \omega_p$ , l'impédance est infinie, ce qui veut dire qu'aucun courant ne parcourt le quartz, celui-ci se comportant alors comme un interrupteur ouvert, on parle d'antirésonance.

Calculons la grandeur demandée par l'énoncé :

$$\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = \left( \frac{\omega_p}{\omega_s} \right)^2 - 1 = \frac{C_s}{C_p} \approx 10^{-2} \ll 1$$

Ainsi, on voit que  $\omega_p > \omega_s$  et que ces deux pulsations sont très proches. On pourra alors écrire de manière approchée :

$$\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = (\omega_p - \omega_s) \left( \frac{\omega_p + \omega_s}{\omega_s^2} \right) \approx \frac{2(\omega_p - \omega_s)}{\omega_s}$$

**9**  $Q$  est le facteur de qualité du quartz (lorsque  $R_s \neq 0$ ) et quantifie la largeur de la résonance : la bande passante est  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_s}{Q}$ . Numériquement,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{1}{Q} \approx 10^{-5} \ll \frac{10^{-2}}{2} \approx \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s}$$

On peut alors conclure que la résonance et l'antirésonance sont nettement séparées ; ce ne serait pas le cas si on avait eu  $1/Q = 10^{-2}$ .

À  $\omega = \omega_s = 1/\sqrt{L_s C_s}$  et pour  $R_s = 0$ , la branche série a une impédance :

$$\underline{Z}_s(\omega_s) = \frac{1}{jC_s \omega_s} + jL_s \omega_s = 0$$

Le courant  $y$  est donc infini. Lorsque  $R_s \neq 0$ , le courant présente en  $\omega_s$  un maximum très intense. Graphe de  $|\underline{Z}|$  en fonction de  $\omega$  : voir figure 1 ci-dessous.

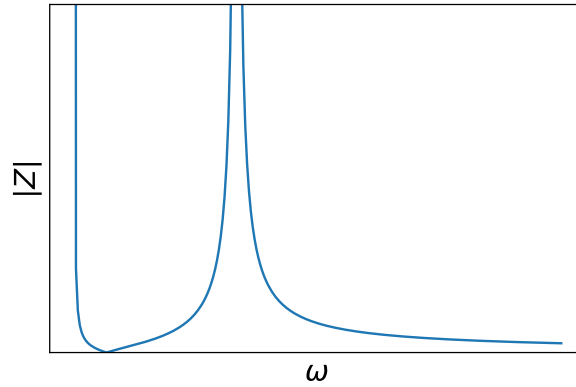


FIGURE 1 – Module de l'impédance en fonction de la pulsation  $\omega$ .

## 2 Obtention des équations constitutives

### 2.1 Charges et force

#### 2.1.1 Condensateur

**10** Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de charges créant un champ électrique  $\vec{E}$ .

– Si  $\mathcal{D}$  est invariante par translation le long d'un axe (resp. rotation autour d'un axe), il en est de même de  $\vec{E}$ , qui alors ne dépend pas de la coordonnée le long de (resp. autour de) cet axe.

– Tout plan de symétrie  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{D}$  est aussi un plan de symétrie de  $\vec{E}$ . Ainsi, pour  $M \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{E}(M)$  est dans le plan  $\mathcal{P}$ .

– Tout plan d'antisymétrie  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{D}$  est aussi un plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$ . Ainsi, pour  $M \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{E}(M)$  est orthogonal au plan  $\mathcal{P}$ .

Théorème de Gauss :

Pour toute surface fermée  $\mathcal{S}$  orientée vers l'extérieur,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où  $Q_{\text{int}}$  est la charge intérieure à  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\mathcal{P}$  un plan infini chargé uniformément en surface, avec une densité surfacique de charge  $\sigma$ . On cherche à calculer le champ  $\vec{E}$  créé par  $\mathcal{P}$  en tout point de l'espace.

L'étude des invariances et symétries des charges montre que  $\vec{E}$  ne dépend que de la coordonnée normale à  $\mathcal{P}$ , et qu'il est porté par cette normale.

Ensuite, l'application du théorème de Gauss (par exemple à une surface cylindrique orthogonale à  $\mathcal{P}$ ) conduit à l'expression de  $\vec{E}$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\mathcal{P} \rightarrow M}$$

avec  $\vec{n}_{\mathcal{P} \rightarrow M}$  normale unitaire à  $\mathcal{P}$  orientée de  $\mathcal{P}$  vers  $M$ .

**11** Un condensateur plan idéal est un ensemble de deux armatures planes de surface  $S$ , parallèles, assimilables à des portions de plans infinis. Les deux armatures sont en influence totale, donc elles possèdent des densités surfaciques de charge uniformes et opposées  $\pm\sigma$ .

D'après la question précédente, chaque armature crée un champ électrique uniforme et normal à ces armatures de norme  $|\sigma|/(2\epsilon_0)$ . Par superposition :

– à l'extérieur de l'espace interarmatures, le champ total est nul :  $\vec{E} = \vec{0}$ ,  
 – entre les armatures, le champ vaut  $\sigma/\varepsilon_0\vec{n}$ , avec  $\vec{n}$  normale aux armatures dirigée de  $+\sigma$  vers  $-\sigma$ .  
 La ddp entre les armatures vaut  $U = V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$  et la charge de l'armature  $+\sigma$  vaut  $Q = \sigma S$ .  
 Ainsi,  $Q = \frac{\varepsilon_0 S}{e}U$ , ce qui définit la capacité  $C_0$ , indépendante de la charge :

$$Q = C_0 U \quad \text{où} \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

### 2.1.2 Condensateur avec diélectrique

**12** Le moment dipolaire est  $\vec{p} = qa\vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $-q$  vers  $+q$ .  
 Nommons  $A$  le point portant la charge  $-q$  et  $B$  le point portant la charge  $+q$ . Ainsi,  $OB = OA = a/2$   
 et  $\vec{p} = q\vec{AB}$ .

D'après le théorème de superposition et la loi de Coulomb, le potentiel créé par le dipôle en  $M$  est la somme des potentiels créés par les deux charges et :

$$V_{\vec{p}}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 BM} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM} \left( \frac{OM}{BM} - \frac{OM}{AM} \right)$$

En outre,

$$BM = \|\vec{BM}\| = \sqrt{(\vec{BO} + \vec{OM})^2} = \sqrt{(a/2)^2 + OM^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OM}}$$

On effectue ensuite un développement limité au premier ordre, sachant que  $OM \gg a$  :

$$\frac{OM}{BM} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{2\vec{BO} \cdot \vec{OM}}{OM^2}$$

L'expression est analogue avec le point  $A$ , et ainsi :

$$\frac{OM}{BM} - \frac{OM}{AM} = \frac{(\vec{AO} - \vec{BO}) \cdot \vec{OM}}{OM^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{qOM^2}$$

Et on obtient finalement le résultat de l'énoncé :

$$V_{\vec{p}}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$$

**13** La polarisation d'un diélectrique est le moment dipolaire par unité de volume  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ . Elle s'exprime en  $C \cdot m^{-2}$ .

Supposons  $\vec{P}$  dirigée selon l'axe normal aux faces de la couche. Cette polarisation résulte de l'existence de moments dipolaires individuels, c'est-à-dire de charges  $+$  et  $-$ . Nous avons schématisé sur la figure 2 les dipôles individuels conduisant à la polarisation  $\vec{P}$ . Lorsque  $\vec{P}$  est uniforme (schéma du haut), les charges positives et négatives se compensent dans le volume du diélectrique, mais ce n'est plus le cas à la surface, où l'on a un excès de charges (positives ou négatives selon le côté), d'où l'apparition de charges surfaciques, de signes différents. Lorsque  $\vec{P}$  n'est pas uniforme, les charges surfaciques persistent, mais les charges ne se compensent plus dans le volume, et donc il apparaît une densité volumique de charge.

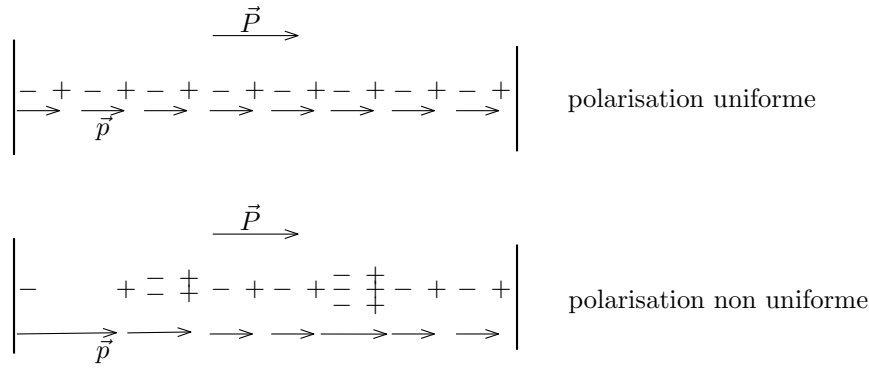


FIGURE 2 – Apparition de charges en surface et en volume dues à la polarisation.

**14** Soit  $M$  un point extérieur au diélectrique et  $A$  un point du diélectrique. Le potentiel créé en  $M$  par l'élément de volume  $d\tau$  autour de  $A$  est :

$$\begin{aligned} dV(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(A)d\tau \overrightarrow{AM}}{AM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P}(A) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_A \left( \frac{1}{AM} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \text{div}_A \left( \frac{\vec{P}(A)}{AM} \right) - \frac{1}{AM} \text{div}_A \vec{P}(A) \right] d\tau \end{aligned}$$

Le potentiel total en  $M$  s'obtient par intégration sur le diélectrique, de volume  $V$  et surface  $S$  :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{1}{r} \text{div} \vec{P} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P}}{r} d\vec{S} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{-\text{div} \vec{P}}{r} d\tau \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Green-Ostrogradski. Cette expression finale montre que le potentiel créé par la polarisation  $\vec{P}$  est identique à celui dû à une densité volumique de charge  $\rho_p = -\text{div} \vec{P}$  et à une densité surfacique de charge  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ .

**15** Pour un diélectrique LHI, la polarisation est proportionnelle à  $\vec{E}$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

où  $\chi$  est la susceptibilité diélectrique du milieu, sans dimension.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit dans le milieu :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} - \text{div} \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Ainsi, en posant  $\epsilon_r = 1 + \chi$ , on réécrit l'équation de Maxwell-Gauss sous la forme :

$$\text{div} (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{\text{libre}}$$

Cette équation est identique à celle à laquelle obéit le champ dans le vide, en remplaçant  $\rho_{\text{tot}}$  par  $\rho_{\text{libre}}$  et  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_0 \epsilon_r$ . La présence du milieu diélectrique a pour effet de modifier la permittivité.

**16** D'après ce qui précède, le condensateur rempli d'un diélectrique a pour capacité :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = 3,01 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

Avec  $\epsilon_r > 1$ , on constate que  $C > C_0$  : la présence du diélectrique augmente la capacité du condensateur.

### 2.1.3 Piézoélectricité

**17** En absence d'étirement (figure b dans l'énoncé), les barycentres des charges positives (atomes de silicium) et des charges négatives (atomes d'oxygène) sont confondus, et situés au centre de la maille hexagonale régulière.

En présence d'étirement (force  $\vec{F}$  vers le haut), on peut utiliser la figure c pour repérer les barycentres : point de concours des médiatrices de chacun des triangles de charges. Il apparaît alors clairement que le barycentre des charges + est situé au-dessus de celui des charges -. Il en résulte donc un moment dipolaire net dirigé de bas en haut.

Si l'on raisonne par unité de volume du cristal, on a donc bien une polarisation  $\vec{P}_p$  colinéaire à  $\vec{F}$  et de même sens.

**18** On utilise les notations de la figure 5 de l'énoncé, ainsi que les résultats de la question 14. Pour  $\vec{P}_p = P_p \vec{u}_x$ , et  $\vec{n} = +\vec{u}_x$  sur la face du haut et  $\vec{n} = -\vec{u}_x$  sur la face du bas, on a :

- sur la face supérieure, densité surfacique  $\sigma_p = P_p > 0$ ,
- sur la face inférieure, densité surfacique  $-P_p = -\sigma_p < 0$ .

**19** On sait qu'à l'interface entre deux milieux 1 et 2, le vecteur déplacement  $\vec{D}$  peut subir une discontinuité normale  $\vec{D}_2 - \vec{D}_1 = \sigma_{\text{libre}} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ , où  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est la normale unitaire dirigée de 1 vers 2. Dans la situation proposée, nommons 1 le quartz et 2 l'armature métallique. On sait que dans ce métal à l'équilibre,  $\vec{D} = \vec{0}$  (puisque  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  le sont aussi). Ainsi, à la surface du quartz,  $\sigma_{\text{libre}} = \sigma$  et :

$$\vec{D} = -\sigma \vec{n}$$

**20** Dans la lame de quartz entre les armatures métalliques,  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  sont uniformes (condensateur plan, milieu LHI) et dirigés selon  $\vec{u}_x$ , donc il en va de même pour  $\vec{D}$ . Ainsi, la valeur de  $\vec{D}$  est celle qui règne à la surface du quartz :

$$\vec{D} = -\sigma_{\text{haut}} \vec{u}_x = \sigma_{\text{bas}} \vec{u}_x = \frac{-q}{S} \vec{u}_x$$

Par ailleurs,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} + \frac{\varepsilon \alpha x}{e} \vec{u}_x = \varepsilon \vec{E} + \frac{\varepsilon \alpha x}{e} \vec{u}_x$$

Finalement,

$$-\frac{q}{S} = \varepsilon E + \frac{\varepsilon \alpha x}{e} = \varepsilon \frac{-u}{e} + \frac{\varepsilon \alpha x}{e}$$

(en effet,  $E = -u/e$  par calcul de la circulation, et en accord avec les notations de la figure 1b de l'énoncé). En introduisant la capacité  $C$  du condensateur avec le diélectrique de quartz,  $C = \varepsilon S/e$ , on obtient bien :

$$u = \frac{q}{C} + \alpha x$$

**21** Lorsque  $q = 0$ , l'équation ( $CEM_2$ ) s'écrit  $F = kx$  et traduit l'élasticité du milieu :  $F$  compense la force de rappel élastique du milieu. Le paramètre  $k$  est lié au module d'Young  $\mathcal{E}$  du quartz, coefficient de proportionnalité entre contrainte et déformation pour une déformation élastique :

$$\frac{F}{S} = \mathcal{E} \frac{x}{e} \implies F = \frac{S\mathcal{E}}{e} x = kx$$

**22** Lorsque  $F = 0$ , on a  $x = -\frac{\alpha}{k}q$  et donc :

$$u = \frac{q}{C} - \frac{\alpha^2}{k}q = \frac{q}{C'} \quad \text{où} \quad C' = \frac{C}{1 - C\alpha^2/k}$$

$C'$  est la capacité apparente de l'ensemble. Elle est augmentée par rapport à la capacité d'une lame non piézoélectrique.

## 2.2 Bilan énergétique

**23** Dans le système d'équations constitutives ( $EC$ ), multiplions la première par le courant  $i = \dot{q}$  circulant dans les fils et la seconde par la vitesse  $\dot{x}$  de déplacement du centre d'inertie de la lame. On obtient :

$$\begin{cases} ui = \frac{q\dot{q}}{C} + \alpha x\dot{q} \\ 0 = m\dot{x}\ddot{x} + \delta\dot{x}^2 + kx\dot{x} + \alpha q\dot{x} \end{cases}$$

Sachant que  $\frac{d}{dt}(\alpha qx) = \alpha(q\dot{x} + \dot{q}x)$ , on peut sommer les deux équations pour obtenir :

$$ui = \delta\dot{x}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \alpha qx \right)$$

soit, terme à terme :

$$P_{\text{électrique}} = P_{\text{frottements}} + \frac{d}{dt} (E_{\text{cinétique}} + E_{\text{élastique}} + E_{\text{condensateur}} + E_{em})$$

Cela traduit le bilan énergétique du condensateur avec piézoélectrique : la puissance fournie par le générateur imposant  $u$  est répartie en trois termes mécaniques (dissipation par frottement, énergie cinétique, énergie élastique), un terme électrique (condensateur) et un dernier terme mixte, électromécanique, couplant charge  $q$  et allongement  $x$ .

## 3 Création d'une seconde

### 3.1 Un exemple d'oscillateur

**24** Le schéma de l'ALI idéal est représenté sur la figure 3.

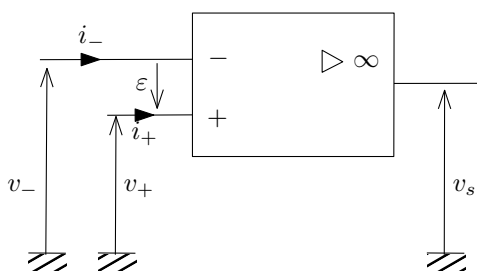


FIGURE 3 – ALI idéal : définition des grandeurs.

Ses caractéristiques sont les suivantes :

$$i_+ = i_- = 0 \quad ; \quad |v_s| \leq V_{\text{sat}} \quad ; \quad v_s = G\varepsilon \quad \text{où} \quad G \rightarrow \infty$$



En régime de fonctionnement linéaire, on a  $\varepsilon = 0$ . Ce régime de fonctionnement est envisageable si la boucle de rétroaction englobant l'ALI est stable. Dans le dipôle à résistance négative proposé, la sortie est en rétroaction sur la borne inverseuse, on peut donc envisager un tel régime. Comme il y a également une rétroaction sur la borne non inverseuse, il y aura également un régime de fonctionnement saturé, non étudié ici.

**25** Dans le montage proposé, notons  $v_s$  la tension de sortie de l'ALI. On a  $v_e - v_s = R_1 i_e$ . Et par pont diviseur de tension,  $\frac{v_s}{v_+} = \frac{R_2 + R_3}{R_3}$ . Ajoutons que  $v_e = v_+$  en fonctionnement linéaire, et il vient :

$$v_e = -\frac{R_3 R_1}{R_2} i_e$$

Ainsi, vu de l'entrée, le montage se comporte comme un dipôle résistif ( $v_e \propto i_e$ ) de résistance négative  $-R' = -\frac{R_3 R_1}{R_2}$ . La puissance électrique reçue par ce dipôle est  $v_e i_e = -R_3 R_1 i_e^2 / R_2 < 0$ , c'est donc un générateur, qui doit tirer son énergie des alimentations  $\pm 15$  V de l'ALI.

**26** Compte tenu de l'équivalence qui vient d'être démontrée pour le dipôle  $AM$ , le circuit présenté est équivalent à  $C$ ,  $L$ ,  $R$  et  $-R'$  associées en série, et parcourues par le courant  $i$ . L'application de la loi des mailles donne l'équation différentielle en  $i$  :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R - R') \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Le type de solutions de cette équation dépend :

– du signe du discriminant  $\Delta = (R - R')^2 - 4L/C \rightarrow$  solutions sinusoïdales ou non,

– du signe des racines  $\frac{-(R - R') \pm \sqrt{\Delta}}{2L} \rightarrow$  solutions amplifiées ou non.

En particulier, et contrairement au cas d'une résistance pure  $R$ , les solutions peuvent être amplifiées. Cela se produit pour  $R - R' < 0$ . Lorsque  $R - R' > 0$ , on retrouve le cas d'une résistance pure, et les solutions (oscillantes ou non) seront toujours atténuées.

Le cas limite entre ces deux situations correspond à  $R - R' = 0$ . Dans ce cas, l'équation est celle d'un oscillateur harmonique, et les solutions sont strictement sinusoïdales, sans atténuation ni amplification. Ces oscillations sont de pulsation  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et la résistance  $R_3$  doit être choisie telle

que  $R' = R$ , c'est-à-dire  $R_3 = R_{3c} = \frac{R_2 R}{R_1}$ .

**27** L'association  $RLC$  en série a pour impédance :

$$\underline{Z} = jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}$$

dont le module vaut :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Celui-ci est minimal lorsque  $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ , soit encore  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Sachant que  $|\underline{Z}| \times |i| = U$  fixée,  $|\underline{Z}|$  minimal correspond à un courant  $i$  maximal : il s'agit d'une résonance en courant.

**28** Pour  $R_3 = R_{3c}$ , on a vu que  $R = R'$ , donc les solutions de l'équation sont du type  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . Avec un courant initialement nul et un condensateur initialement déchargé, la seule solution

acceptable pour  $i$  est  $A = B = 0$ , donc  $i = 0$ . En effet, la présence de la bobine et du condensateur imposent la continuité de la charge et du courant à  $t = 0$ . Ainsi, les oscillations ne pourront pas démarrer.

Pour que le démarrage des oscillations soit observé, il est nécessaire d'avoir un système légèrement instable, donc que les solutions soient exponentiellement amplifiées. Cela nécessite  $R < R'$ , c'est-à-dire  $R_3 > R_{3c}$ .

### 3.2 Oscillateur à quartz

**29** L'impédance du quartz est minimale à  $\omega = \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}$  (pulsation calculée pour  $R_s = 0$ , situation pour laquelle  $Z_e = 0$ ).

La fréquence de résonance est  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}}$  et  $Q = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}$ . En outre, les oscillations sont obtenues pour  $R_s = \frac{R_3 R_1}{R_2}$ . On lit sur la figure  $R_1 = 3,9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 560 \Omega$  et  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ , de sorte que  $R_s = 7,0 \text{ k}\Omega$ . Enfin,  $C_s = \frac{1}{2\pi R_s Q f_0} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ F}$  et  $L_s = \frac{R_s Q}{2\pi f_0} = 750 \text{ H}$ .

### 3.3 Diviseur de fréquence

**30** Le complémentaire de 1 est  $\bar{1} = 0$  et celui de 0 est  $\bar{0} = 1$ .

**31** Au départ,  $K = 0$ . À chaque front montant d'horloge,  $K$  est changé en son complémentaire. Donc  $K$  passe à 1 au premier front montant de CLOCK, puis redescend à 0 une période  $1/f$  plus tard, etc (voir chronogramme figure 4). Ainsi,  $K$  est modifié à chaque période, et sa fréquence de répétition est finalement  $f/2$ . Le signal  $K$  peut à nouveau être utilisé comme signal d'horloge sur une nouvelle bascule D pour diviser à nouveau sa fréquence par 2.

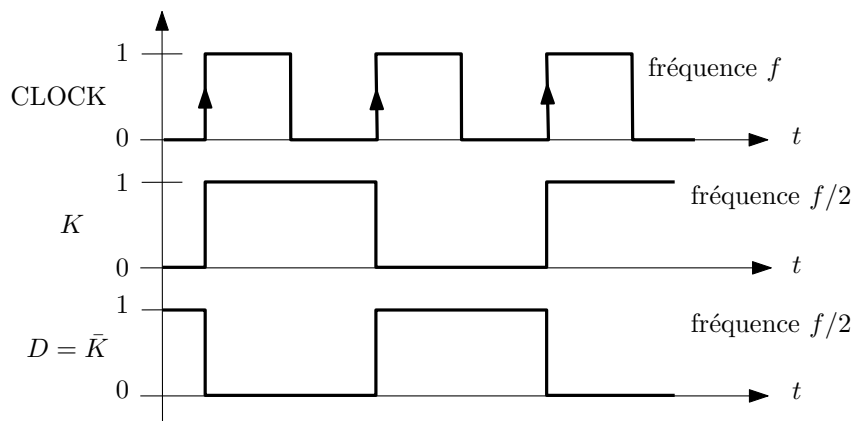


FIGURE 4 – Chronogramme complété.

## 4 Optique adaptative

### 4.1 Diffraction et résolution spatiale

**32** Pour la diffraction de Fraunhofer, il est nécessaire que la pupille diffractante  $\mathcal{P}$  soit plane, éclairée par une onde plane, et que l'observation s'effectue à l'infini. Deux montages sont proposés sur la figure 5. En (a), on utilise comme source une lampe spectrale et un trou source  $S$  ; celui-ci est au foyer objet de la lentille convergente  $L_1$ . L'écran  $E$  est dans le plan focal image de la lentille  $L_2$ . En (b), la source est un laser, et l'écran  $E$  est situé à grande distance.

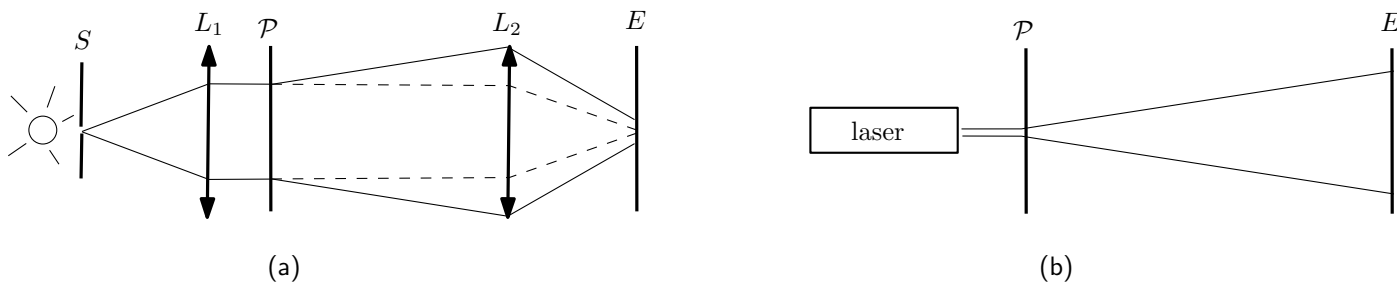


FIGURE 5 – Deux montages de TP pour la diffraction de Fraunhofer. (a) : la source est une lampe spectrale. (b) : la source est un laser.

**33** Lorsque la pupille est circulaire, la figure de diffraction est celle représentée sur la figure 6. Le rayon angulaire de la tache centrale (mesuré du centre à la première extinction), appelée aussi tache d'Airy, est  $1,22 \frac{\lambda}{D}$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière utilisée. Sur l'écran  $E$ , le rayon de la tache centrale est donc  $1,22 \frac{\lambda f'_2}{D}$ , où  $f'_2$  est la distance focale image de la seconde lentille sur la figure 5 (a).

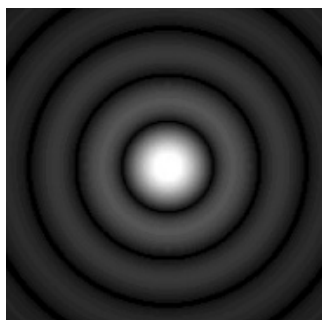


FIGURE 6 – Diffraction de Fraunhofer pour une pupille circulaire.

**34** En négligeant les anneaux de la figure de diffraction (qui ne contiennent qu'une faible portion de l'énergie lumineuse), on peut conclure de la question précédente qu'en présence d'une lentille de taille finie (de focale  $f$ , diamètre  $D$ ), l'image d'une source ponctuelle est une tache (de rayon  $1,22 \lambda f / D$ ) et non un point.

Le critère de Rayleigh, illustré sur la figure 7 stipule que deux points objets peuvent être séparés sur l'écran dès que la distance entre les centres des taches est supérieure au rayon des taches (le pied d'une tache étant confondu avec le sommet de l'autre). La distance angulaire minimale entre deux points pour qu'ils soient séparés est donc  $\theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ .

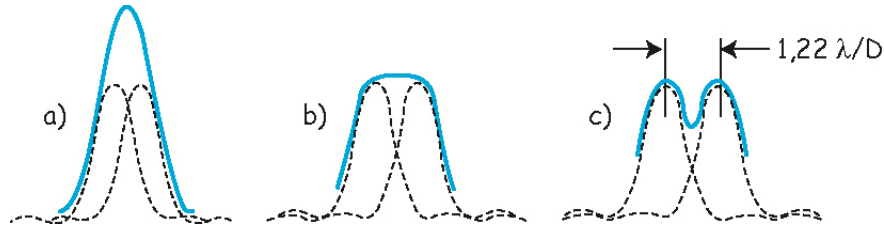


FIGURE 7 – Critère de Rayleigh. En (a) et (b) les deux taches ne sont pas séparées. À partir de  $\theta_R = 1,22\lambda/D$ , en (c), elles sont séparées.

**35** Une lunette est un instrument composé de lentilles. Un télescope, quant à lui, est constitué de miroirs sphériques et paraboliques. Cela permet notamment de limiter les aberrations chromatiques de l'instrument. En outre, un télescope de même focale qu'une lunette a une plus faible longueur (plus faible encombrement). Les limitations par la diffraction s'appliquent également aux télescopes, mais un miroir peut être de diamètre beaucoup plus grand qu'une lentille. On a donc intérêt, pour augmenter la résolution spatiale et diminuer  $\theta_R$  à augmenter  $D$ , donc à construire de grands télescopes.

## 4.2 Amplitude diffractée par un télescope

**36** On peut considérer l'étoile vue de la Terre comme située à l'infini. On observe son image dans le plan focal du télescope, qui est aussi le plan de la diffraction de Fraunhofer : la figure de diffraction de Fraunhofer se forme au voisinage de l'image géométrique de la source.

**37** L'étoile étant située à très grande distance, la portion de surface d'onde interceptée par la pupille d'entrée du télescope peut être assimilée à une portion de plan. En incidence normale (le télescope pointe l'étoile), on a sur la pupille d'entrée  $\psi_i(X, Y) = \psi_0$ .

**38** Par définition, la fonction de transmission de la pupille est donnée par :

$$\tau(X, Y) \equiv \frac{\psi(X, Y)}{\psi_i(X, Y)},$$

où  $\psi(X, Y)$  est l'amplitude de l'onde juste après la pupille. On en déduit :

$$\psi(X, Y) = \tau(X, Y) \times \psi_0.$$

On obtient :

$$h(x, y) = \frac{C\psi_0}{\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(X, Y) e^{-2j\pi(\frac{xX}{\lambda f} + \frac{yY}{\lambda f})} dXdY.$$

**39** On pose  $u \equiv -X/\lambda f$  et  $v \equiv -Y/\lambda f$ . On a alors :

$$h(x, y) = (\lambda f C \psi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(-\lambda f u, -\lambda f v) e^{+2j\pi(xu+yv)} dudv.$$

On identifie alors la transformée de Fourier inverse de la fonction  $\tau(-\lambda f u, -\lambda f v)$  :

$$h(x, y) = (\lambda f C \psi_0) \mathcal{F}^{-1}[\tau(-\lambda f u, -\lambda f v)](x, y) = (\lambda f C \psi_0) \mathcal{F}^{-1}[\tau(\lambda f u, \lambda f v)](x, y),$$

où la dernière égalité découle de la parité de la fonction  $\tau$  (utilisée à la question 40).  $u$  et  $v$  sont les variables de Fourier conjuguées de  $x$  et  $y$ . Elles sont homogènes à l'inverse d'une longueur, ce sont les fréquences spatiales de l'image de l'étoile sur le plan focal du télescope.

### 4.3 Réponse impulsionnelle

**40** On a  $\hat{H}(u, v) \equiv \mathcal{F}[\mathcal{H}](u, v)$ , soit (voir le formulaire en fin d'énoncé) :

$$\hat{H}(u, v) = \mathcal{F}[|h(x, y)|^2](u, v) = \mathcal{F}[h \times h^*](u, v) = \mathcal{F}[h] * \mathcal{F}[h^*],$$

où  $z^*$  désigne le complexe conjugué de  $z$  et le symbole  $*$  désigne une convolution.

Or, d'après le résultat de la question 39 :

$$\mathcal{F}[h](u, v) = (\lambda f C \psi_0) \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}[\tau(\lambda f u, \lambda f v)] = (\lambda f C \psi_0) \tau(\lambda f u, \lambda f v).$$

De même, en utilisant le résultat de la question 39 et la relation (3) du formulaire :

$$\mathcal{F}[h^*](u, v) = \left[ \mathcal{F}[h](-u, -v) \right]^* = (\lambda f C^* \psi_0) \left[ \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}[\tau(-\lambda f u, -\lambda f v)] \right]^* = (\lambda f C^* \psi_0) \tau^*(-\lambda f u, -\lambda f v).$$

On en déduit :

$$\hat{H}(u, v) = (\lambda f \psi_0)^2 |C|^2 \left[ \tau(\lambda f u, \lambda f v) * \tau^*(-\lambda f u, -\lambda f v) \right].$$

La fonction  $\tau$  étant paire et réelle, on obtient finalement le résultat de l'énoncé. On reconnaît, à une constante près, la fonction d'auto-corrélation de la fonction  $\tau(X, Y)$ .

**41** La fonction de transmission de la pupille d'entrée du télescope est un disque de rayon  $D/2$ . La fonction de transfert est la convolution de ce disque par lui-même. Lorsque  $\lambda f |u|$  est supérieure à deux fois le rayon du disque, il n'y a plus d'intersection entre le disque et sa translation selon  $u$ . La fonction de corrélation, et donc la fonction de transfert, vaut alors 0. On a donc  $\hat{H}(u, 0) = 0$  pour  $\lambda f |u| > D$ , soit pour  $|u| > u_c$  avec  $u_c = D/\lambda f$ .

**42**  $\arccos(0) = \pi/2$  donc  $\hat{H}_n(0, 0) = 2/\pi \times \pi/2 = 1$ , ce qui est la valeur attendue en  $(0, 0)$  pour la fonction de transfert normalisée.

Du fait de la diffraction par sa monture, le télescope constitue un filtre passe-bas pour le signal en provenance de l'étoile. Ce filtre atténue les fréquences spatiales d'autant plus fortement qu'elles croissent à partir de 0. Les fréquences spatiales supérieures à  $u_c$  sont totalement coupées. La disparition des hautes fréquences, responsables des zones contrastées de l'image, conduit au lissage de l'image.

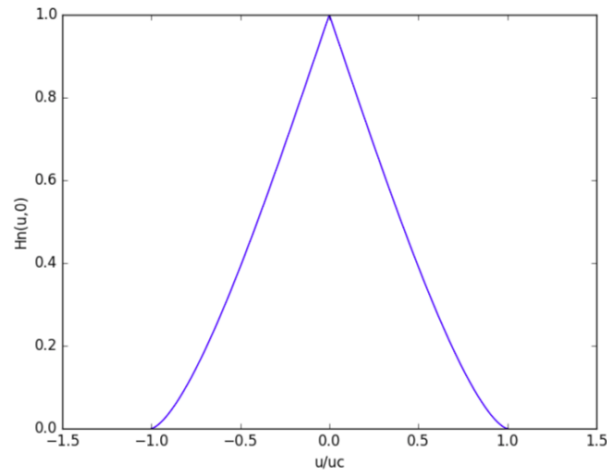


FIGURE 8 – Fonction de transfert d'un télescope limité par la diffraction (en l'absence de turbulence).

## 4.4 Turbulence atmosphérique

### 4.4.1 Estimation de la perturbation

**43** D'après la loi des gaz parfaits,  $P = \rho k_B T / m_{at}$ , donc :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta T}{T} = 0.$$

Or  $(n - 1) \propto \rho$  implique :

$$\frac{\Delta(n - 1)}{n - 1} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T},$$

soit  $\Delta n = -(n - 1)\Delta T/T$ . On en déduit :

$$\Delta L = \Delta n e = -(n - 1)e \frac{\Delta T}{T}.$$

**44** A.N. : Avec  $n = 1.0002678$ ,  $e = 0,3$  m,  $\Delta T = -1$  K et  $T = 300$  K, on trouve :  $\Delta L = 0,27 \times 10^{-6}$  m.

**45** D'après le critère de Rayleigh, il faut  $\Delta L < \lambda/4$  pour que la dégradation due à la présence de turbulence soit négligeable par rapport à l'effet de la diffraction. Ici on a  $\lambda/4 = 0,5 \times 10^{-6}/4 = 0,13 \times 10^{-6}$  m. Ainsi, on voit qu'un écart de température de 1 K suffit à dégrader l'image par turbulence.

### 4.4.2 Réponse du télescope en présence de turbulence

**46** Le module  $A_m$  vaut 1 si les turbulences n'influent que sur la phase.

**47** Des modulations de l'amplitude de  $A$  se traduisent par une variation de l'éclat de l'étoile : c'est le phénomène de scintillement, facilement observable à l'œil nu un soir où le ciel est dégagé.

**48** Avec  $A_m(X, Y, t) = 1 \forall t$ , on obtient :

$$\hat{H}(u, v, t) = K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(X, Y) \tau(X - \lambda f u, Y - \lambda f v) \exp[j(\phi(X, Y, t) - \phi(X - \lambda f u, Y - \lambda f v, t))] dX dY.$$

**49**  $r_0$  peut être vu comme la taille maximale du télescope équivalent qui ne serait pas affecté par la turbulence (donc qui serait limité par la diffraction). Comme  $r_0/D < 1$ , on voit que la turbulence limite les performances du télescope.

**50** D'après le critère de Rayleigh, la séparation angulaire entre deux étoiles doit être au minimum de  $1,22\lambda/D = 7,6 \times 10^{-8}$  radian en l'absence de turbulence, et  $1,22\lambda/r_0 = 6 \times 10^{-6}$  radian en présence de turbulence. En l'absence de turbulence, le télescope peut résoudre des détails environ 100 fois plus fins qu'en présence de turbulence.

**51** Dans le cas d'une correction idéale, il est nécessaire de choisir  $\phi_c = \phi$ , en tout point et à tout instant.

En présence de turbulence, on remplace  $A$  par  $A_c = A \exp(-j\phi_c) = A_m \exp[j(\phi - \phi_c)] = \exp[j(\phi - \phi_c)]$  puisque  $A_m = 1$ . Le choix  $\phi_c = \phi$  conduit donc à  $A_c = 1$  : on retrouve la fonction de transfert en absence de turbulence.

## 4.5 Optique adaptative

**52** Théorème de Malus : les fronts d'onde (ou surfaces d'onde) sont perpendiculaires aux rayons lumineux.

**53** Lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction :

- les rayons réfléchi et réfracté appartiennent au plan d'incidence (plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre),
- $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$
- $i'_1 = -i_1$

Les fronts d'onde sont dessinés sur la figure 9. Ils sont continus sur le dioptre ; leur distance est proportionnelle à  $1/n$ , c'est-à-dire à la célérité de l'onde.

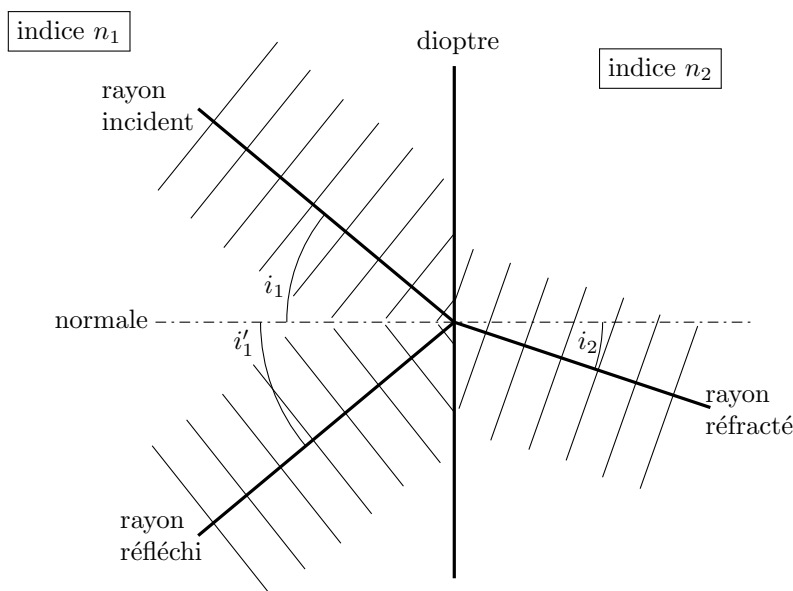


FIGURE 9 – Modification des fronts d'onde lors de la réflexion et de la réfraction.

**54** La construction de l'image d'un objet est illustrée sur la figure 10.

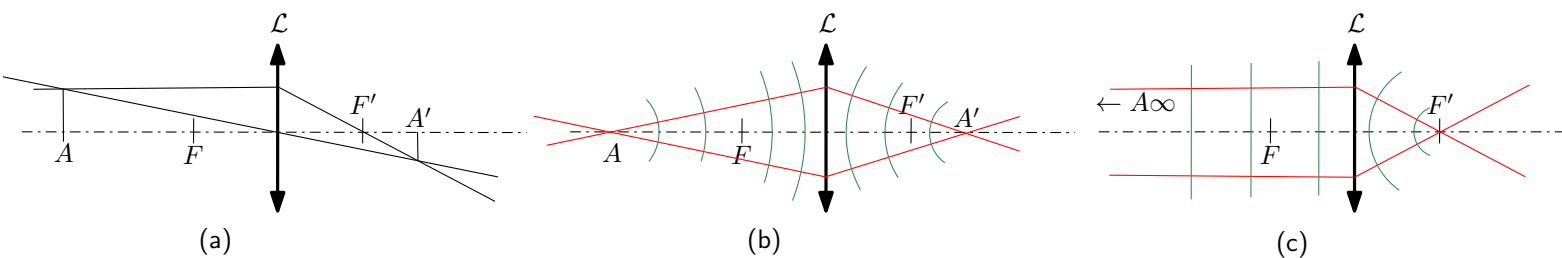


FIGURE 10 – Construction de l'image  $A'$  d'un objet  $A$  par une lentille convergente  $\mathcal{L}$ . Les rayons lumineux sont en rouge, les fronts d'onde en vert. (a) : principe de la construction lorsque  $A$  est à distance finie. (b) : rayons et fronts d'onde pour  $A$  à distance finie. (c) :  $A$  est à l'infini.

**55** Nous illustrons sur la figure 11 (a) l'inclinaison  $\alpha/2$  d'une portion de miroir transformant une portion de front d'onde incliné de  $\alpha$  sur l'horizontale en un front d'onde vertical. Lorsque le front d'onde incident n'est pas plan, la figure 11 (b) présente la construction par portions d'un miroir redressant le front d'onde. La pente locale du front d'onde incident est corrigée par l'inclinaison moitié du miroir. Tous les rayons réfléchis sont donc parallèles entre eux.

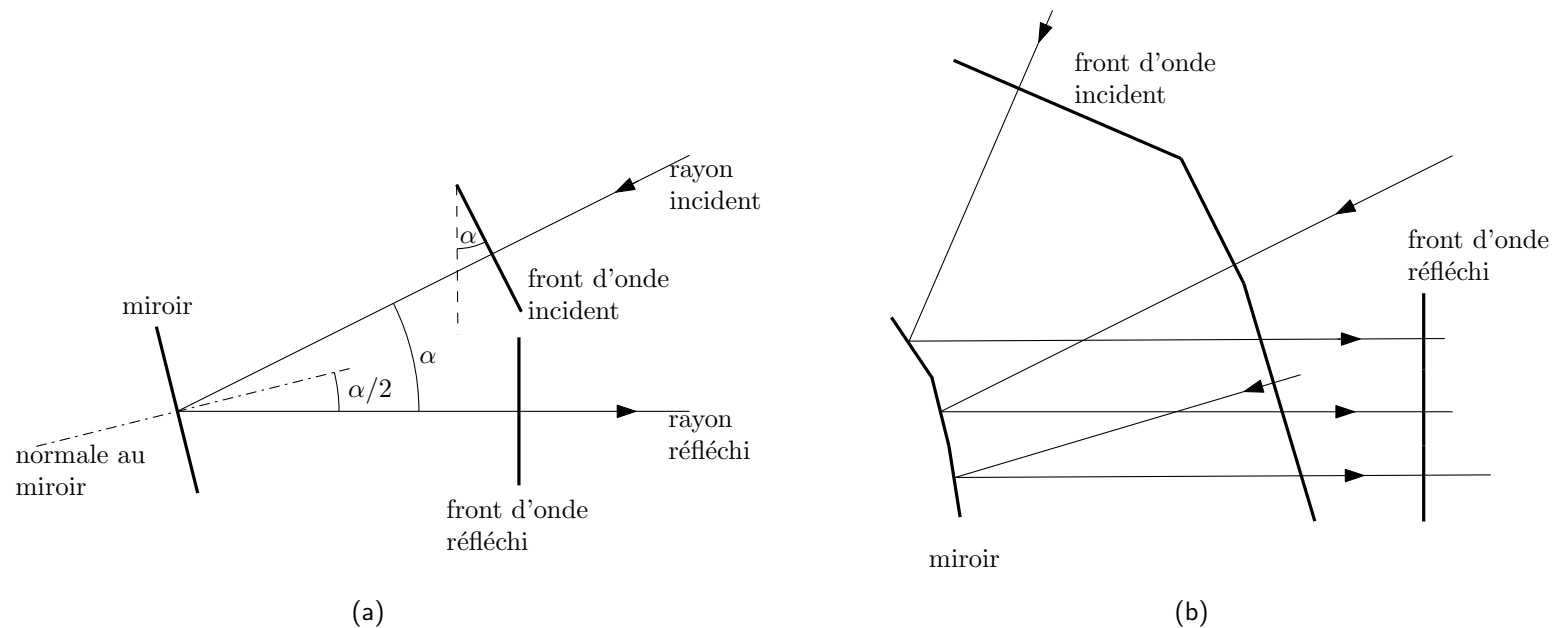


FIGURE 11 – Quelle que soit l'inclinaison locale du front d'onde, un miroir correctement incliné renvoie tous les rayons lumineux parallèles. (a) : principe pour un miroir unique. (b) : application à un miroir découpé en trois parties planes.

**56** Le capteur CCD est positionné dans le plan focal image de la lentille (figure 12). Ainsi, pour un front d'onde plan incident, tous les rayons lumineux convergent en un même point du plan focal image (donc du plan du capteur) : au foyer image, sur l'axe de la lentille, si le front d'onde incident est normal à l'axe optique; en un foyer secondaire sinon. Ce foyer secondaire est distant de  $h$  du foyer image, avec  $h = f' \tan \alpha$ .  $h$  est algébrique, de même signe que  $\alpha$  (et  $|\alpha| \ll 1$  dans les conditions de Gauss).

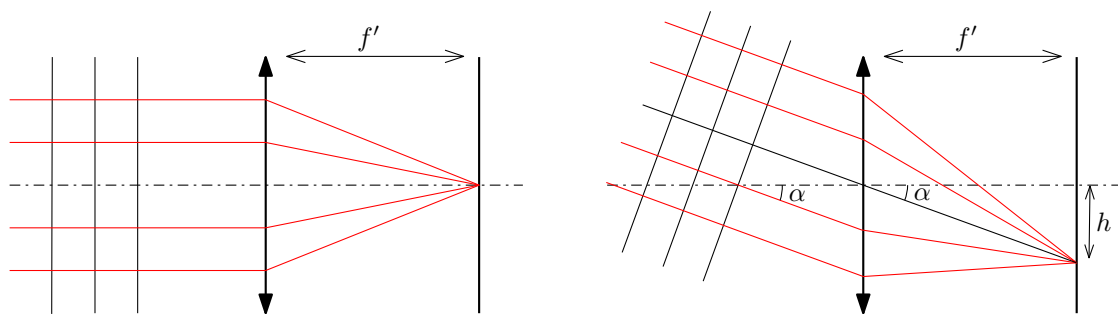


FIGURE 12 – Image d'un front d'onde plan par une micro-lentille unique, dans son plan focal image. À gauche le front d'onde est normal à l'axe optique. À droite les rayons lumineux sont inclinés d'un angle  $\alpha$ ; ils sont tracés en rouge.

**57** Un front d'onde incident non plan est approché par une ligne brisée (figure 13). L'image est constituée d'un ensemble de points; il suffit de mesurer les distances de ces points à l'axe des micro-lentilles pour remonter à l'inclinaison locale du front d'onde (voir question précédente).



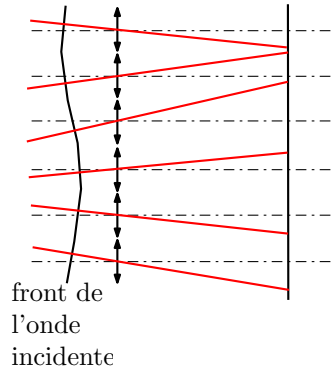


FIGURE 13 – Image d'un front d'onde non plan par une matrice de micro-lentilles. Les rayons lumineux sont dessinés en rouge.

**58** Le signal de sortie de l'analyseur de surface d'onde est une tension image de la position des points images sur la matrice CCD (figure 13). Ces positions sont, au premier ordre, proportionnelles à l'écart angulaire entre le front d'onde et un plan. Il s'agit donc de la forme du front d'onde non corrigée par le miroir. Angulairement, la déformation du miroir à imposer est la moitié de la déformation du front d'onde (voir figure 11). Avec un coefficient de proportionnalité, il suffit donc d'imposer à une lame piézoélectrique une tension image des points sur la matrice CCD. Pour chaque actionneur piézoélectrique déformant une portion de miroir, l'une des faces doit être fixe, l'autre solidaire du miroir.

**59** On considère qu'il faut au moins un actionneur par zone de taille  $r_0$ . Sur le miroir, on a donc  $N = \pi D^2 / \pi r_0^2$  zones de diamètre  $r_0$ . La taille minimale recherchée est  $r_0 = D / \sqrt{N}$ . A.N. :  $r_0 = 2 / \sqrt{200} = 0,14$  m.