
CAPES externe de Physique-chimie
Session 2014 « exceptionnelle »
Proposition de correction pour la composition de physique



Ce document est une proposition de correction. Il ne doit pas être considéré comme un modèle de copie à rendre mais plutôt comme une aide à la correction. Il est possible que quelques erreurs se soient glissées dans cette première version. Si vous pensez en avoir trouvé une, merci de me contacter via le formulaire situé sur la page du site internet www.phy-chim.fr.



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons :
Attribution – Pas d'utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International.

Fondée sur une œuvre hébergée sur : www.phy-chim.fr

Table des matières

PARTIE 1 : MODES DE TRANSMISSION DE SIGNAUX NUMÉRIQUES : PRINCIPES PHYSIQUES ET LIMITATIONS.....	1
A) Ligne bifilaire en cuivre.....	1
1°) Équation de propagation dans le cas idéal.....	1
2°) Prise en compte des faibles pertes.....	1
3°) Évaluation de l'atténuation.....	2
B) Fibre optique.....	2
1°) Notions d'ouverture numérique et de mode.....	3
2°) Dispersion.....	4
Dispersion intermodale.....	4
Dispersion intramodale.....	5
3°) Atténuation.....	5
PARTIE 2 : TRANSFERT DE DONNÉES NUMÉRIQUES.....	6
PARTIE 3 : GÉOLOCALISATION PAR TRANSMISSION DE DONNÉES, LE SYSTÈME GPS.....	7
A) Satellites en orbite circulaire.....	7
B) Mesure du temps.....	11
C) Problème de la synchronisation des horloges.....	11
D) Correction due à la vitesse des satellites : dilatation des durées.....	12
E) Correction due à l'altitude : effet gravitationnel.....	13

Transmission de signaux numériques

PARTIE 1 : MODES DE TRANSMISSION DE SIGNAUX NUMÉRIQUES : PRINCIPES PHYSIQUES ET LIMITATIONS

A) LIGNE BIFILAIRE EN CUIVRE

1°) Équation de propagation dans le cas idéal

1.a. La loi des nœuds donne : $i(x+dx, t) = i(x, t) - \Gamma \cdot dx \cdot \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial t}$

Un développement de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \cdot dx = i(x, t) - \Gamma \cdot dx \cdot \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} \cdot dx \right)$$

En négligeant le terme d'ordre 2 on obtient :

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

1.b. La loi des mailles donne : $u(x, t) = u(x+dx, t) + \Lambda \cdot dx \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$

En procédant de même qu'au 1.a. on obtient :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2)$$

1.c. En dérivant (1) par rapport à t et (2) par rapport à x on obtient :

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x \partial t} = -\Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\Lambda \cdot \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t \partial x}$$

En combinant ces deux équations on obtient l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \Gamma \cdot \Lambda \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{On pose } c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \cdot \Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-12} \times 250 \cdot 10^{-9}}} = 2,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Cette valeur est très élevée, elle correspond à 2/3 de la vitesse de la lumière dans le vide !

2°) Prise en compte des faibles pertes

2.a. En injectant \underline{u} dans l'équation de propagation avec perte et en utilisant les relations $\partial \underline{u} / \partial t = j \cdot \omega \cdot \underline{u}$ et $\partial \underline{u} / \partial x = -j \cdot k \cdot \underline{u}$ on obtient :

$$k^2 = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \omega^2 - j \cdot R \cdot \Gamma \cdot \omega$$

2.b. En écrivant $k = k' - j.k''$, en élevant au carré puis en identifiant avec 2.a, il vient :

$$k'^2 - k''^2 = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \omega^2 \quad (1)$$

$$2k'k'' = R \cdot \Gamma \cdot \omega \quad (2)$$

En élevant (2) au carré et en injectant dans (1), il vient :

$$k'^4 - \Lambda \Gamma \omega^2 k'^2 - \frac{(R \Gamma \omega)^2}{4} = 0$$

En posant $K' = k'^2$ on obtient un polynôme dont le discriminant vaut :

$$\Delta = \Gamma^2 \omega^4 \Lambda^2 \left(1 + \left(\frac{R}{\omega \Lambda} \right)^2 \right) \approx \frac{\omega^4}{c^4}$$

On en déduit $k' = \omega/c$ (les solutions $k' = -\omega/c$ et $k' = 0$ étant écartées).

En injectant cette égalité dans (2) il vient :

$$k'' = \frac{R}{2 \cdot \Lambda \cdot c}$$

2.c. $U_l = \| \underline{u}(x=l) \| = \| U_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t - (k' - j.k'') \cdot l)} \| = U_0 \cdot e^{-k'' \cdot l}$ car $\| e^{jz} \| = 1 \forall z \in \mathbb{R}$

2.d. $A_{dB} = 10 \cdot \log \left(\frac{U_l}{U_0} \right) = 10 \cdot \log (e^{-k'' \cdot l}) = -10 \cdot \log (e) \cdot k'' \cdot l$

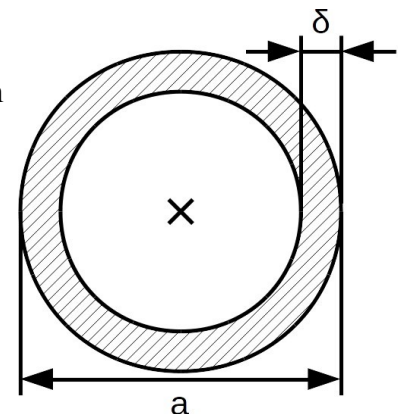
3°) Évaluation de l'atténuation

3.a. Sur le schéma ci-contre la surface utile S_{utile} est hachurée. Son aire vaut :

$$S_{utile} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 - \pi \cdot (a/2 - \delta)^2 = \pi \cdot a^2 (1/4 - 1/4 - \delta^2/a^2 + \delta/a)$$

En négligeant le terme d'ordre 2 en δ/a on obtient :

$$S_{utile} = \pi \cdot a \cdot \delta$$



3.b. $R = \frac{2 \cdot R_{tot}}{L} = \frac{2 \cdot \rho}{S} = \frac{2 \cdot \rho}{\pi \cdot a \cdot \delta} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot \mu_0 \cdot f}{\pi}}$

3.c. $A_{dB} = \frac{10 \cdot R \cdot \log(e)}{\Lambda \cdot c} = \frac{10 \cdot \log(e)}{\Lambda \cdot c} \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot \mu_0 \cdot f}{\pi}}$

Soit $A_{dB} = \frac{2}{a} \times \frac{10 \cdot \log(e)}{250 \cdot 10^{-9} \times 2 \cdot 10^8} \times \sqrt{\frac{1,7 \cdot 10^{-8} \times 4 \cdot \pi \times 10^{-7} \times 1,1 \cdot 10^6}{\pi}} = \frac{1,50 \cdot 10^{-5}}{a}$

À partir des valeurs du tableau on peut calculer le coefficient d'atténuation linéique via la formule : $A_{dB} = Att \times 2/1000$

a (en mm)	Atténuation (en dB)		Er
	Valeurs calculées (formule)	Valeurs expérimentales (tableau)	
0,40	0,038	0,030	27 %
0,50	0,030	0,025	17 %
0,60	0,025	0,021	16 %

Les ordres de grandeur sont cohérents mais la valeur calculée s'éloigne de la valeur expérimentale lorsque le diamètre du câble devient faible. La dépendance de A_{dB} en $1/a$ prédite par la formule est conforme aux valeurs du tableau.

B) FIBRE OPTIQUE

1°) Notions d'ouverture numérique et de mode

4.a. L'angle de réfraction au point O vaut : $r = \pi/2 - i_1$.

La loi de la réfraction de Snell-Descartes donne :

$$\sin(\theta_0) = n_1 \cdot \sin(r) = n_1 \cdot \cos(i_1)$$

4.b. À la limite de la réflexion totale l'angle de réfraction vaut $\pi/2$. La loi de la réfraction de Snell-Descartes donne :

$$n_1 \cdot \sin(i_1) = n_2 \cdot \sin(\pi/2) \quad \text{soit} \quad \sin(i_1) = n_2/n_1$$

Il y a réflexion totale pour i_1 tel que : $\sin(i_1) > n_2/n_1$

4.c. $\sin(\theta_{0,max}) = n_1 \cdot \cos(\arcsin(n_2/n_1)) = n_1 \cdot \sqrt{1 - n_2^2/n_1^2} = ON$ soit $\theta_{0,max} = \arcsin(ON)$

$$\theta_{0,max} = \arcsin(ON) = \arcsin(\sqrt{1,48^2 - 1,46^2}) = 14^\circ$$

Remarque : démonstration de $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\text{En posant } x = \arcsin(y) \text{ on obtient : } \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1 - y^2}$$

5.a. $\delta = n_1 \cdot (CA_2 + A_2A_3 + A_3F - DE)$

5.b. $\delta = n_1 \cdot (A_2A_3 - A_2'A_3')$

5.c. D'après la figure ci-contre :

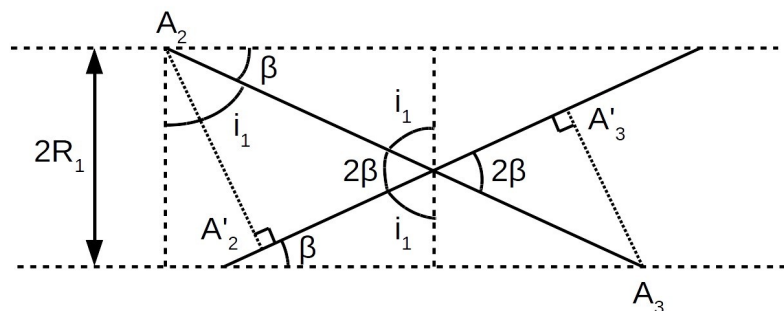
$$2 \cdot R_1 = A_2A_3 \cdot \cos(i_1)$$

Et :

$$A_2'A_3' = A_2A_3 \cdot \cos(2\beta)$$

Or :

$$\pi/2 - \beta = i_1$$



On obtient donc : $A_2 A_3 = \frac{2 \cdot R_1}{\cos(i_1)}$ et $A_2' A_3' = \frac{2 \cdot R_1}{\cos(i_1)} \cdot \cos(\pi - 2 \cdot i_1)$

D'après 5.b. la différence de marche vaut :

$$\delta = n_1 \cdot (A_2 A_3 - A_2' A_3') = n_1 \cdot \frac{2 \cdot R_1}{\cos(i_1)} (1 + \cos(2 \cdot i_1)) = 4 \cdot n_1 \cdot R_1 \cdot \cos(i_1)$$

En utilisant 4.a. il vient :

$$\delta = 4 \cdot R_1 \cdot n_1 \cdot \cos(i_1) = 4 \cdot R_1 \cdot \sin(\theta_0)$$

5.d. Cette hypothèse est équivalente à une condition d'interférences constructives entre les différents faisceaux, cohérents, qui se propagent dans la fibre.

Cette condition s'écrit : $4 \cdot R_1 \cdot \sin(\theta_0) = m \cdot \lambda$ (C1)

6.a. Pour qu'il y ait réflexion totale il faut : $\theta_{0,m} < \theta_{0,max}$ ie $\arcsin\left(\frac{m \cdot \lambda}{4 \cdot R_1}\right) < \arcsin(ON)$

Il vient : $m < \frac{4 \cdot R_1 \cdot ON}{\lambda}$

6.b. Dans ce cas : $\frac{4 \cdot R_1 \cdot ON}{\lambda} = \frac{4 \times 25 \cdot 10^{-6} \times \sqrt{1,48^2 - 1,46^2}}{1,55 \cdot 10^{-6}} = 15,6$

Il y a donc 16 modes possibles pour $m \in [0, 15]$.

6.c. Dans ce cas : $\frac{4 \cdot R_1 \cdot ON}{\lambda} = \frac{4 \times 3,5 \cdot 10^{-6} \times \sqrt{1,447^2 - 1,443^2}}{1,55 \cdot 10^{-6}} = 0,9$

Seul le mode $m=0$ est autorisé.

6.d. Le déphasage vaut $\phi = \pi$ à condition que $n_a < n_b$. Sinon il vaut 0.

6.e. Dans le cas présent $n_1 > n_2$ donc le déphasage vaut $\phi = 0$. La condition C1 n'est pas modifiée.

2°) Dispersion

Dispersion intermodale

7.a. Le faisceau guidé fait un angle β_m avec l'axe de la fibre de longueur L.

La lumière parcourt donc une distance : $l = \frac{L}{\cos(\beta_m)}$

Le chemin optique correspondant est : $[l] = \frac{n_1 \cdot L}{\cos(\beta_m)}$

7.b. Le chemin optique est minimisé pour $\cos(\beta_m) = 1$ soit $\beta_m = 0$ soit $m = 0$. Ce mode suit le cœur de la fibre.

7.c. $\Delta t_m = \frac{[l]}{c} = \frac{n_1 \cdot L}{c \cdot \cos(\beta_m)}$

$$7.d. \quad \Delta t_{min} = \frac{[l_{min}]}{c} = \frac{n_1 \cdot L}{c}$$

$$\Delta t_{max} = \frac{[l_{max}]}{c} = \frac{n_1 \cdot L}{c \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{N \cdot \lambda}{4 \cdot n_1 \cdot R_1}\right)\right)} = \frac{n_1 \cdot L}{c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{N \cdot \lambda}{4 \cdot n_1 \cdot R_1}\right)^2}}$$

8.a. À l'instant t_1 le mode le plus rapide émis à l'instant $t=0$ arrive à l'extrémité de la fibre. L'intensité lumineuse augmente jusqu'à t_2 instant auquel le mode le plus lent émis à $t=0$ arrive à l'extrémité de la fibre. L'intensité lumineuse reste constante jusqu'à t_3 instant auquel le mode le plus rapide émis à $t=\tau_0$ arrive. Ensuite elle décroît jusqu'à t_4 lorsque le mode le plus lent émis à $t=\tau_0$ arrive.

8.b. On a $t_1 = \Delta t_{min}$ et $t_2 = \Delta t_{max}$ donc $t_m = t_2 - t_1 = \Delta t_{max} - \Delta t_{min}$

8.c. On a $t_3 = \tau_0 + \Delta t_{min}$ et $t_4 = \tau_0 + \Delta t_{max}$ donc $t_d = t_4 - t_3 = \Delta t_{max} - \Delta t_{min}$

8.d. $\tau_L = t_m + t_d + (t_3 - t_2) = \Delta t_{max} - \Delta t_{min} + \tau_0$

$$\frac{\Delta \tau}{L} = \frac{\tau_L - \tau_0}{L} = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{L} = \frac{n_1}{c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{N \cdot \lambda}{4 \cdot n_1 \cdot R_1}\right)^2}} - 1 \right) = \frac{n_1}{c} \cdot \left(\frac{4 \cdot n_1 \cdot R_1}{\sqrt{(4 \cdot n_1 \cdot R_1)^2 - (N \cdot \lambda)^2}} - 1 \right)$$

$$8.e. \quad \frac{\Delta \tau_L}{L} = \frac{1,48}{3,00 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{4 \times 1,48 \times 25,0 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(4 \times 1,48 \times 25,0 \cdot 10^{-6})^2 - (15 \times 1,55 \cdot 10^{-6})^2}} - 1 \right)$$

$$= 62,0 \cdot 10^{-12} \text{ s.m}^{-1} = 62,0 \text{ ns.km}^{-1}$$

9.a. On cherche la période minimale du signal : $T_H^{min} = 4 \times \Delta \tau$.

$$\text{Le débit maximal correspondant est : } Q_{max} = \frac{1}{T_H^{min}} = \frac{1}{4 \cdot \Delta \tau} = \frac{1}{4 \times 62,0 \cdot 10^{-9}} = 4,0 \text{ Mbit.s}^{-1}$$

9.b. L'élargissement des impulsions est proportionnelle à la longueur de la fibre optique.

$$\text{On a donc : } Q_{max}' = \frac{Q_{max}}{20} = 0,2 \text{ Mbit.s}^{-1}$$

Dispersion intramodale

10.a. Si $\lambda = \lambda_1 = 1,3 \mu\text{m}$ alors $D_{gd}(\lambda_1) = -D_m(\lambda_1)$.

$$\text{La dispersion intermodale vaut alors } D(\lambda_1) = D_{gd}(\lambda_1) + D_m(\lambda_1) = 0 \text{ ps.km}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$$

10.b. Pour $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ on a : $D = D_{gd} + D_m = -7 + 23 = 16 \text{ ps.km}^{-1} \cdot \text{nm}^{-1}$

$$\text{Et } \Delta t_g = L \cdot D \cdot \Delta \lambda = 100 \times 16 \times 1,00 = 1,6 \text{ ns}$$

10.c. La période minimale du signal est : $T_H^{min} = 4 \times \Delta t_g$

Le débit maximal correspondant est : $Q_{max} = \frac{1}{T_H^{min}} = \frac{1}{4 \cdot \Delta t_g} = \frac{1}{4 \times 1,6 \cdot 10^{-9}} = 160 \text{ Mbit.s}^{-1}$

3°) Atténuation

- 11.a. La diffusion Rayleigh est plus importante pour les faibles longueurs d'ondes ce qui explique l'augmentation globale de l'atténuation entre $\lambda = 1,3 \mu m$ et $\lambda = 0,8 \mu m$. Le pic d'absorption pour $\lambda = 1,4 \mu m$ est dû aux liaisons OH. L'augmentation de l'atténuation pour $\lambda > 1,6 \mu m$ est due à l'absorption par la silice.
- 11.b. Pour que la transmission d'information soit optimale il faut que le coefficient d'absorption soit minimal. Deux longueurs d'ondes conviennent : $\lambda = 1,31 \mu m$ et $\lambda = 1,55 \mu m$.
- 11.c. Notons P_f la puissance finale à la sortie de la fibre et P_i la puissance initiale injectée :

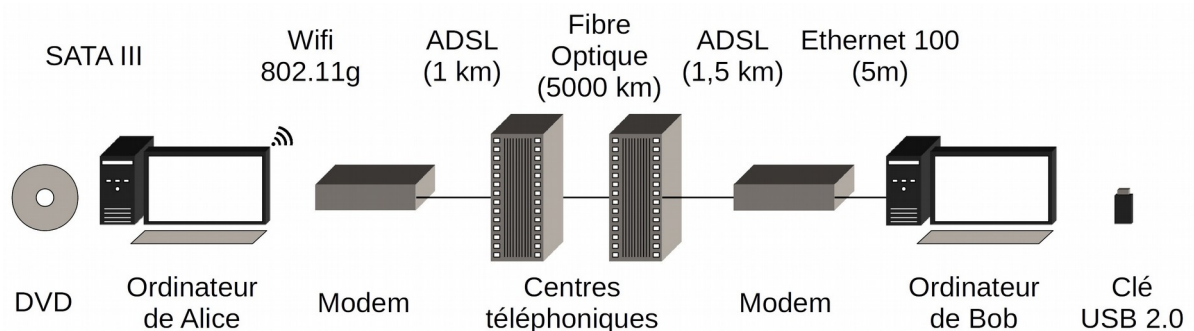
$$A_{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_f}{P_i}\right) \text{ soit } \frac{P_f}{P_i} = 10^{A_{dB}/10} = 10^{-0,2 \times 100/10} = 1\%$$

PARTIE 2 : TRANSFERT DE DONNÉES NUMÉRIQUES

12. **Remarque 1** : cette partie est une résolution de problème, ce qui suit doit être considéré comme une piste de résolution et non comme la réponse attendue.

Remarque 2 : il y a une erreur dans le document E) de l'énoncé. Le sens descendant offre bien un débit supérieur au sens montant mais il correspond à un transfert du central téléphonique vers l'abonné et non l'inverse.

Schéma de la situation :



Hypothèses :

- les temps de propagation sont négligés (on a vu que la vitesse des signaux dans les fibres optiques et les paires torsadées pouvait atteindre 2/3 de la vitesse de la lumière dans le vide)
- chaque élément du réseau retransmet immédiatement les paquets d'information qu'il réceptionne sans attendre de recevoir l'intégralité du fichier

Il reste à calculer les temps de transfert pour chacune des étapes. Le temps de transfert le plus long sera celui qui limitera le débit de l'ensemble de la chaîne de transmission. Chacun de ces temps de transfert se calcule à l'aide d'une relation du type $t_i = \chi \cdot M / D$ avec $M = 100 \text{ Mo}$ la taille du fichier à transférer, D le débit de la connectique utilisée enfin χ est le facteur dû au codage 8b/10b ($\chi = 10/8 = 1,25$ s'il est utilisé, $\chi = 1$ sinon).

Temps de lecture du DVD :

$$t_1 = 100 / 10,8 = 9,3 \text{ s}$$

Temps de transfert du DVD en SATA III :

$$t_2 = 1,25 \times 100 / 600 = 0,21 \text{ s}$$

Temps de transfert en WIFI :

$$t_3 = 1,25 \times 100 / (25/8) = 40 \text{ s car 1 octet} = 8 \text{ bit}$$

Temps de transfert en ADSL (montant) :

$$t_4 = 100 \times 1.10^6 / (24 \times 4000 \times 15/8) = 556 \text{ s}$$

car chacune des 24 porteuses transmet 4000 symboles de 15 bit chaque seconde

Temps de transfert par la fibre :

$$t_5 = 100.10^6 / 1.10^9 = 0,1 \text{ s}$$

Temps de transfert en ADSL (descendant) :

$$t_6 = 100 \times 1.10^6 / (223 \times 4000 \times 15/8) = 60 \text{ s}$$

Temps de transfert en Ethernet 100 :

$$t_7 = 1,25 \times 100 / 12,5 = 10 \text{ s}$$

Temps de transfert en USB 2.0 :

$$t_8 = 1,25 \times 100 / 60 = 2,1 \text{ s}$$

Le temps de transfert le plus lent, celui qui limite le débit de l'ensemble de la chaîne de transmission est celui dû au transfert par ADSL (sens montant) entre le modem d'Alice et le central téléphonique.

Le temps de transfert total du fichier est donc : $t_{tot} = t_4 = 556 \text{ s} = 9 \text{ min } 16 \text{ s}$

PARTIE 3 : GÉOLOCALISATION PAR TRANSMISSION DE DONNÉES, LE SYSTÈME GPS

A) Satellites en orbite circulaire

13. Le premier satellite artificiel, Spoutnik 1, a été lancé par les Russes en 1957, en pleine guerre froide.

- 14.a.** La source du champ gravitationnel, c'est à dire la distribution de masse, est symétrique par rapport à tout plan passant pas le point M et par le point O, centre de la Terre. Le champ gravitationnel est donc contenu dans l'ensemble de ces plans soit : $\vec{g}(M)=g(M) \cdot \vec{e}_r$
- 14.b.** La situation étudiée est invariante par rotation selon θ et φ donc g ne dépend pas de ces deux variables, soit : $g(M)=g(r)$
- 14.c.** Soit S une surface fermée, contenant une masse M. En appliquant le théorème de Gauss, le champ gravitationnel créé par cette masse vérifie : $\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot M \cdot G$ G étant la constante de la gravitation universelle et $d\vec{S}$ un vecteur élément de surface dirigé vers l'extérieur de S.

Remarque : Par rapport à l'électrostatique on fait les analogies suivantes :

$$Q \rightarrow M \text{ et } \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \rightarrow G$$

- 14.d.** En appliquant 14.c. il vient : $-g(M) \cdot 4\pi \cdot r^2 = M_T \cdot 4\pi \cdot G$
Soit :

$$\vec{g}(M) = -G \frac{M_T}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

15.a. $F_{T/s}^{\vec{}} = M_s \cdot \vec{g}(M) = -G \frac{M_s \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

15.b. Le théorème du moment cinétique donne : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(F_{T/s}^{\vec{}})$

Or la force exercée par la Terre sur le satellite est une force centrale donc $\vec{M}_O(F_{T/s}^{\vec{}}) = \vec{0}$.

Soit $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$ ie $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge M_s \cdot \vec{v} = C \text{ste}$.

Le mouvement est contenu dans un plan fixe perpendiculaire à \vec{L}_0 et contenant le point O.

16.a. Le vecteur position vaut : $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$

Le vecteur vitesse vaut : $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$

Le vecteur accélération vaut : $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{e}_r$

En utilisant $v = r \cdot \dot{\theta}$ et $\frac{dv}{dt} = r \cdot \ddot{\theta}$ il vient : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r$

16.b. La deuxième loi de Newton appliquée au satellite donne $M_s \cdot \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r = F_{T/s}^{\vec{}}$

Or d'après 15.a. $F_{T/s}^{\vec{}}$ est portée par \vec{e}_r .

En projetant sur \vec{e}_θ , on en déduit que $dv/dt = 0$, le mouvement est bien uniforme.

16.c. En projetant 16.b. sur \vec{e}_r on obtient : $-M_s \cdot \frac{v^2}{r} = -G \frac{M_s \cdot M_T}{r^2}$

$$\text{Soit : } v = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T + h}}$$

17.a. D'après 16.c. $v = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T + h}}$ et d'après 14.d. $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$.

$$\text{Soit : } v = \sqrt{\frac{g \cdot R_T}{1 + h/R_T}}$$

17.b. $v = \sqrt{\frac{9,81 \times 6,37 \cdot 10^6}{1 + 20,2 \cdot 10^6 / 6,37 \cdot 10^6}} = 3870 \text{ m.s}^{-1}$

18.a. La période de rotation du satellite est définie par : $T = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)}{v}$

$$\text{Soit : } T = 2\pi \cdot \frac{(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{G \cdot M_T}}$$

18.b. « Les carrés des périodes de révolution des planètes du système solaire sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des ellipses qu'elles parcourent » *Kepler, fin XVI^e début XVII^e*

18.c. D'après 18.a. on a :

$$h = \left(\frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{g} \cdot R_T \right)^{2/3} - R_T = \left(\frac{12 \times 60^2}{2\pi} \times \sqrt{9,81 \times 6,37 \cdot 10^6} \right)^{2/3} - 6,37 \cdot 10^6 = 20228 \text{ km}$$

19.a. L'énergie mécanique d'un système soumis à une force conservative est constante.

Or, l'altitude h et la vitesse v du satellite sont constantes donc son énergie mécanique

$E_m = E_p + E_c$ est constante. Donc $\vec{F}_{T/s}$ est une force conservative

19.b. $\vec{F}_{T/s} = -\text{grad } E_p$ avec $E_p = -G \frac{M_s \cdot M_T}{R_T + h}$

19.c. En utilisant 16.c. : $E_c = \frac{1}{2} \cdot M_s \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot M_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$ et d'après 19.b. $E_p = -G \frac{M_s \cdot M_T}{R_T + h}$

On a bien : $2 \cdot E_c + E_p = 0$

20.a. $\cos(\phi_0) = \frac{R_T}{R_T + h}$ soit $\phi_0 = \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$

20.b. $\bar{AB} = 2 \cdot \phi_0 \cdot (R_T + h)$

20.c. Comme la vitesse du satellite est constante, il y a proportionnalité entre la longueur d'un arc et le temps de parcours de cet arc donc $\tau/T = \bar{AB}/((R_T + h) \cdot 2\pi)$.

$$\text{Soit : } \tau = T \cdot \frac{\bar{AB}}{(R_T + h) \cdot 2\pi}$$

20.d. En utilisant 18.a. , 20.a. , 20.b. et 20.c. on obtient : $\tau = \frac{(R_T+h)^{3/2}}{R_T \cdot \sqrt{g}} \cdot 2 \cdot \arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)$

20.e. En utilisant 20.c. on obtient : $[\tau] = s \cdot \frac{m}{m} = s$

20.f. $\tau = \frac{(6,27 \cdot 10^6 + 20,2 \cdot 10^6)^{3/2}}{6,27 \cdot 10^6 \times \sqrt{9,81}} \times 2 \times \arccos\left(\frac{6,27 \cdot 10^6}{6,27 \cdot 10^6 + 20,2 \cdot 10^6}\right) = 18242 \text{ s} = 5 \text{ h } 4 \text{ min } 2 \text{ s}$

20.g. $\frac{T}{\tau} = \frac{12 \times 3600}{18242} = 2,4$

21. Un train doit être composé d'au moins 3 satellites.

22.a. Notons H le projeté orthogonal de A' sur (OQ). On a $OA' = OA = R_T + h$ et $OQ = R_T$.

$$\cos(\phi_0) = \frac{OH}{OA'} = \frac{1}{OA'} (OQ + QH)$$

Or $QH = HA' \cdot \tan(\alpha_0)$ donc : $\cos(\phi_0) = \frac{1}{OA'} (OQ + HA' \cdot \tan(\alpha_0))$ (2)

Or $HA' = OA' \cdot \sin(\phi_0)$ donc : $\cos(\phi_0) = \frac{1}{OA'} (OQ + OA' \cdot \sin(\phi_0) \cdot \tan(\alpha_0))$ (3)

Enfin on a : $OA' = OA = R_T + h$ et $OQ = R_T$.

En remplaçant dans (3) on obtient : $\cos(\phi_0) = \frac{R_T}{R_T+h} + \sin(\phi_0) \cdot \tan(\alpha_0)$ (4)

22.b. Si $\alpha_0 = 30^\circ$ alors $\tan(\alpha_0) = 1/\sqrt{3}$.

Posons $u = \cos(\phi_0)$ alors $\sin(\phi_0) = \sqrt{1-u^2}$. Posons $\eta = R_T/(R_T+h) = 0,24$.

L'équation (4) de 22.a. devient : $u - \eta = \sqrt{1-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

En élevant au carré on obtient l'équation attendue : $u^2 - \frac{3}{2} \cdot \eta u + \frac{3}{4} \eta^2 - \frac{1}{4} = 0$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 en u est : $\Delta = 1 - \frac{3}{4} \eta^2 = 0,96$

Les deux solutions possibles sont :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{+3/2\eta + \sqrt{\Delta}}{2} = 0,67 & \rightarrow \phi_{0,1} = \arccos(u_1) = 48^\circ \\ u_2 = \frac{+3/2\eta - \sqrt{\Delta}}{2} = -0,31 & \rightarrow \phi_{0,2} = \arccos(u_2) = 108^\circ \end{cases}$$

La solution compatible avec la situation étudiée doit vérifier $\phi_0 < 90^\circ$. Donc $\phi_0 = 48^\circ$.

22.c. En utilisant 20.c. il vient :

$$\tau = T \cdot \frac{\overline{AB}}{(R_T+h) \cdot 2\pi} = \frac{T \cdot \phi_0}{\pi} = \frac{12 \times 48 / 360 \times 2\pi}{\pi} = 3,2 \text{ h} = 3 \text{ h } 12 \text{ min}$$

23. Le nom du projet de géolocalisation par satellite européen est GALILEO. Actuellement seuls 4 satellites sont en service.

B) Mesure du temps

- 24.a. La seconde est la durée d'un certain nombre de périodes de la radiation correspondant à une transition hyperfine entre deux niveaux d'énergie de l'atome de césium 133.
- 24.b. Cette définition date de la 13^e Conférence générale des poids et mesures (CGPM) de 1967.
- 25.a. La précision sur la mesure du temps doit être de l'ordre de : $\delta t = \frac{\delta d}{c} = \frac{1}{3.10^8} = 3 \text{ ns}$
- 25.b. Dans les années 2000, la précision des horloges atomiques était de 10 ps sur une durée de 1 jour. Cette précision est largement suffisante pour les systèmes GPS.

C) Problème de la synchronisation des horloges

- 26.a. Notons t l'instant auquel le promeneur reçoit simultanément les deux signaux.
Le signal émis par l'horloge A a parcouru la distance : $d = v_s \cdot (t - t_0)$ (1)
Le signal émis par l'horloge B a parcouru la distance : $D - d = v_s \cdot (t - \Delta t - t_0)$ (2)
En faisant (1)-(2) il vient : $d = \frac{1}{2} \cdot (D + \Delta t \cdot v_s) = \frac{1}{2} \times (300 + 10 \times 10) = 200 \text{ km}$
- 26.b. À partir de 26.a. en faisant (1)+(2) il vient : $D = 2v_s \cdot (t - t_0) - v_s \Delta t$
Soit : $t = D / (2v_s) + \Delta t / 2 + t_0$
On obtient : $t - t_0 = 300 / (2 \times 10) + 10 / 2 = 20 \text{ min}$ donc $t = t_0 + 20 \text{ min} = 10 \text{ h } 25 \text{ min}$
- 26.c. Le retard de la montre du promeneur vaut $\tau = t_p - t = 10 \text{ h } 24 \text{ min} - 10 \text{ h } 25 \text{ min} = -1 \text{ min}$
- 27.a. Les horloges sont synchronisées si : $t_{B,2} - t_{A,1} = t_{A,3} - t_{B,2}$
- 27.b. Notons ϵ le décalage de l'horloge B par rapport à l'horloge A. Dans l'équation précédente il faut remplacer $t_{B,2}$ par $t_{B,2} + \epsilon$.

$$t_{B,2} + \epsilon - t_{A,1} = t_{A,3} - (t_{B,2} + \epsilon)$$

$$\text{Soit : } \epsilon = \frac{t_{A,3} + t_{A,1}}{2} - t_{B,2} = \frac{10 \text{ h } 10 \text{ min} + 10 \text{ h } 00 \text{ min}}{2} - 10 \text{ h } 7 \text{ min} = -2 \text{ min}$$

L'horloge A est en retard de 2 minutes par rapport à l'horloge B.

D) Correction due à la vitesse des satellites : dilatation des durées

28. « La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens »

Einstein, 1905

29.a. Un **événement** est un phénomène ponctuel dans le temps et dans l'espace. Il peut être localisé à l'aide d'un quadruplet (x,y,z,t) .

Une **durée propre** est un intervalle de temps mesuré à l'aide d'une horloge immobile dans le référentiel lié à l'objet étudié.

29.b. Dans le référentiel R' la distance d' parcourue par la lumière vaut : $d' = 2 \cdot L = \Delta t' \cdot c$ (1)

Dans le référentiel R la distance d parcourue par la lumière vaut :

$$d = 2\sqrt{L^2 + (v \cdot \Delta t / 2)^2} = \Delta t \cdot c \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow L^2 = \Delta t'^2 c^2 / 4$$

$$(2) \rightarrow L^2 = \frac{\Delta t^2 c^2}{4} - \frac{v^2 \cdot \Delta t^2}{4}$$

On en déduit : $\Delta t^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \Delta t'^2$ soit $\Delta t = \Delta t' \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}$ avec $\beta = v/c$

On a $0 \leq \beta < 1$ donc $\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} > 1$ soit $\Delta t > \Delta t'$.

Dans tout référentiel $R \neq R'$, il y a dilatation des durées puisque le temps Δt mesuré est toujours supérieur au temps propre $\Delta t'$.

30.a. Ici le temps propre est T_0 . Le retard vaut : $\tau_1 = T - T_0 = T_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} - 1\right)$

Pour un observateur situé sur Terre, la période (propre) de l'horloge restée sur Terre est inférieure à la période de l'horloge embarquée. Le temps de l'horloge embarquée s'écoule donc moins vite que le temps de l'horloge sur Terre : elle retarde.

30.b. $\tau_1 = 24 \times 3600 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1 - (3,9 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^8)^2}} - 1\right) = 7,3 \mu\text{s}$

30.c. On a $\tau_1 = 7,3 \mu\text{s} \gg \delta t = 3 \text{ ns}$, il faut absolument tenir compte de ce retard.

E) Correction due à l'altitude : effet gravitationnel

31.a. D'après 19.b. $E_p = -G \frac{m \cdot M_T}{R_T + h}$ donc $U = \frac{E_p}{m} = -G \frac{M_T}{R_T + h}$

31.b. $U - U_0 = -G \frac{M_T}{R_T + h} + G \frac{M_T}{R_T}$ et d'après 14.d. $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$.

On en déduit : $U - U_0 = -g \cdot \frac{R_T^2}{R_T + h} + g \cdot R_T = g \cdot \frac{R_T \cdot h}{R_T + h}$

32.a. $T - T' \approx \frac{U - U_0}{c^2} \cdot T'$. Or $U - U_0 > 0$ donc $T > T'$.

La période T' de l'horloge dans le satellite est donc inférieure à la période T de l'horloge restée sur Terre. Pour l'horloge dans le satellite, le temps s'écoule donc plus rapidement. Elle est donc en avance par rapport à l'horloge du satellite.

$$\begin{aligned}
 \tau_2 &= T - T' = \frac{g \cdot R_T \cdot h}{R_T + h} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot T' \\
 \mathbf{32.b.} \quad &= \frac{9,81 \times 6,37 \cdot 10^3 \times 20,2 \cdot 10^6}{6,37 \cdot 10^3 + 20,2 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \times 24 \times 3600 = 46 \text{ } \mu\text{s}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{32.c.} \quad \tau_2 = 46 \text{ } \mu\text{s} > \tau_1 = 7,3 \text{ } \mu\text{s} .$$

Enfin, l'horloge embarquée dans le satellite est en avance par rapport à celle restée sur Terre.